CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En el capítulo precedente hemos estudiado diversos métodos de resolución de varios tipos de ecuaciones diferenciales, principalmente de primer orden. En este capítulo vamos a estudiar ecuaciones diferenciales de orden superior.

Como ya hemos indicado anteriormente los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno son escasos. Por este motivo, en general, es extremadamente complicado resolver ecuaciones de este tipo. Sin embargo, hay una clase especial de ecuaciones, las ecuaciones diferenciales lineales, para la que existe una teoría bien desarrollada. Por fortuna muchas de las ecuaciones de orden superior que aparecen en las aplicaciones son de este tipo.

Recordemos que una ecuación diferencial

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

se dice que es **lineal**, si la función F es lineal como función de la función incógnita y de sus derivadas. Una ecuación de este tipo se puede escribir en la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{3.1}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y b son funciones que sólo dependen de x.

Si el coeficiente de $y^{(n)}$ no se anula, dividiendo, si es preciso, ambos miembros de (3.1) por dicho coeficiente se puede conseguir que el coeficiente de $y^{(n)}$ sea 1, y en ese caso la ecuación se puede expresar en la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{3.2}$$

A esta forma de la ecuación se le denomina **forma normal o estándar** de la ecuación lineal.

Cuando la función b es idénticamente nula la ecuación (3.1) se dice que es una **ecuación diferencial lineal homogénea** de orden n. Si b no es idénticamente nula la ecuación se dice que es **no homogénea**.

Antes de comenzar el estudio de este tipo de ecuaciones es conveniente tener algún resultado que nos garantice que, bajo ciertas condiciones, la ecuación tiene solución.

Teorema 3.0.4 (Teorema de existencia y unicidad). *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y b funciones continuas en un intervalo I, y supongamos que a_n no se anula en dicho intervalo. Entonces, para todo $x_0 \in I$ e $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, existe una única función y que satisface el problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ \\ y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

en el intervalo I.

Si la ecuación es homogénea, la función idénticamente nula siempre es una solución. Teniendo esto en cuenta podemos enunciar la siguiente consecuencia del teorema precedente que nos será de gran utilidad en lo que sigue.

Corolario 3.0.5. *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y b funciones continuas en un intervalo I, y supongamos que a_n no se anula en I. Si y es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en el intervalo I que, para algún $x_0 \in I$, satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ entonces $y \equiv 0$.

La condición de que a_n no se anule no se puede omitir de las hipótesis del teorema como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.0.6. El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 \\ y(0) = a, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

no tiene solución si $a \neq 1$ y tiene infinitas soluciones, las funciones $y(x) = cx^2 + x + 1$, donde c es un número real arbitrario, si $a = 1$.

El ejemplo precedente se puede modificar, por ejemplo dividiendo los dos miembros de la ecuación por x, para dar un ejemplo de que las condiciones sobre la continuidad de los coeficientes y de la función b tampoco pueden ser omitidas de las hipótesis del teorema 3.0.4.

En lo que sigue, salvo mención expresa de lo contrario, siempre consideraremos ecuaciones diferenciales lineales en las que los coeficientes y la función del segundo miembro son funciones continuas. También consideraremos que el coeficiente de la derivada de mayor orden no se anula, por lo que habitualmente expresaremos estas ecuaciones en forma normal.

3.1. Estructura del conjunto de soluciones

Cuando se estudia una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{3.3}$$

suele ser necesario estudiar también la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{3.4}$$

que se obtiene de (3.3) reemplazando la función b por la función idénticamente nula. Al tratar con ambas ecuaciones. a la ecuación (3.3) se le suele denominar **ecuación completa o no homogénea** y a la ecuación (3.4) **ecuación homogénea, o reducida**, asociada a (3.3).

Al igual que ocurría con las ecuaciones lineales de primer orden, conocida una solución particular de la ecuación completa, para conocer la solución general es suficiente con conocer la solución general de la ecuación homogénea asociada. Esto es así porque si y_p es una solución particular de la ecuación (3.3) e y_h es una solución arbitraria de la ecuación homogénea asociada (3.4) entonces[1]

$$\begin{aligned} a_n(x)(y_h+y_p)^{(n)} + \cdots + a_1(x)(y_h+y_p)' + a_0(x)(y_h+y_p) &= \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(y_h+y_p)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\left(y_h^{(k)} + y_p^{(k)}\right) \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_h^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_p^{(k)} = b(x), \end{aligned}$$

lo que nos dice que $y_h + y_p$ es una solución de la ecuación completa.

Recíprocamente, un razonamiento análogo muestra que la diferencia de dos soluciones de la ecuación completa es una solución de la homogénea asociada. Esto implica, en particular, que cualquier solución de la completa es la suma de y_p y una solución de la ecuación homogénea. Hemos demostrado así el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1. *Si y_h es la solución general de la ecuación homogénea (3.4) e y_p es una solución particular de la ecuación completa (3.3) entonces $y_h + y_p$ es la solución general de la ecuación (3.3).*

Como vemos en este teorema el estudio del caso particular de las ecuaciones lineales homogéneas es crucial en el estudio de las ecuaciones lineales. Por este motivo nos vamos a centrar a continuación en el estudio de la estructura de las soluciones de la ecuación homogénea.

[1] Como es habitual, si f es una función, denotaremos por $f^{(0)}$ a la propia función, es decir $f^{(0)} = f$.

Como hemos señalado anteriormente, la función idénticamente nula es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea (3.4). Esta solución se denomina **solución trivial**. El siguiente resultado nos dice que el conjunto de las soluciones de la ecuación homogénea es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones n veces derivables.

Teorema 3.1.2 (Principio de superposición). *Sean $y_1, y_2, \dots, y_m$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.5}$$

en un intervalo I. La combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m,$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_m$ son constantes reales arbitrarias, también es una solución de (3.5) en el intervalo I.

Demostración. Para simplificar su escritura vamos a hacer la demostración para $m = 2$, la demostración en el caso general es análoga.[2] Por la linealidad de las derivadas se tiene que

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(k)} = c_1 \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_1^{(k)} + c_2 \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_2^{(k)} = 0.$$

□

Ejemplo 3.1.3. Se comprueba fácilmente que la ecuación diferencial lineal homogénea de grado 2

$$y'' + y = 0$$

tiene como soluciones particulares en todo $\mathbb{R}$ las funciones

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x.$$

Por el principio de superposición

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias, también es una solución de la ecuación. De hecho esta es la solución general pues si y es una solución cualquiera de la ecuación, la función

$$z(x) = y(0)\cos x + y'(0)\operatorname{sen} x$$

es una solución de la ecuación que satisface $z(0) = y(0)$ y $z'(0) = y'(0)$, lo que, por el teorema 3.0.4, implica que $y = z$.

[2] También se puede deducir del caso $m = 2$ por inducción.

De forma análoga a la empleada en la demostración del principio de superposición para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas se puede demostrar la correspondiente versión del principio para ecuaciones no homogéneas.

Teorema 3.1.4 (Principio de superposición para ecuaciones no homogéneas). *Si para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ la función y_i es una solución de la ecuación diferencial*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_i(x)$$

en un intervalo I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes reales arbitrarias, es una solución de la ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = c_1b_1(x) + \cdots + c_mb_m(x)$$

en el intervalo I.

En el ejemplo 3.1.3 hemos visto que mediante combinaciones lineales de únicamente dos soluciones es posible obtener la solución general de la ecuación. A continuación veremos qué condiciones ha de satisfacer un conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea para que la solución general se obtenga haciendo combinaciones lineales de ellas.

Definición 3.1.5. Un conjunto de funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ se dice que es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes reales, $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0 \tag{3.6}$$

para todo $x \in I$. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Aunque se puede comprobar la dependencia o independencia de un conjunto de funciones acudiendo a la definición, si las funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea existe un procedimiento automático para comprobarlo.

Definición 3.1.6. Dadas n funciones $n-1$ veces derivables, $y_1, \ldots, y_n$, se define el **wronskiano** de $y_1, \ldots, y_n$ como el determinante

$$W[y_1, \ldots, y_n] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Si las funciones $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes en un intervalo I, y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ son constantes no todas nulas, como en (3.6), entonces, para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, también se verifica que

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Suponiendo, para simplificar la escritura, que $c_1 \neq 0$, y haciendo uso de las propiedades de los determinantes se tiene que

$$0 \equiv W\left[\sum_{j=1}^{n} c_j y_j, y_2, \dots, y_n\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j W[y_j, y_2, \dots, y_n] = c_1 W[y_1, \dots, y_n]$$

y por tanto que $W[y_1, \dots, y_n] = 0$.

Hemos demostrado de esta manera el siguiente resultado.

Proposición 3.1.7. *Sean $y_1, \dots, y_n$ funciones $n-1$ veces derivables en un intervalo I. Si existe un $x \in I$ tal que $W[y_1, \dots, y_n]$ no se anula en x entonces el conjunto de funciones $y_1, \dots, y_n$ es linealmente independiente en I.*

Corolario 3.1.8. *Toda ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene n soluciones linealmente independientes.*

Demostración. Por el teorema de existencia y unicidad, 3.0.4, existen soluciones de la ecuación, $y_1, \dots, y_n$, verificando las condiciones iniciales

$$y_k^{(j-1)}(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant n.$$

En este caso la matriz que aparece en la definición del wronskiano tiene unos en la diagonal y ceros en las demás entradas, luego $W[y_1, \dots, y_n](x_0) = 1$. El resultado se sigue de la proposición precedente. □

El recíproco de la proposición 3.1.7 no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.9. Sean $y_1(x) = x^3$ e $y_2 = |x^3|$. Si c_1, c_2 son tales que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, particularizando para $x = 1$ y $x = -1$ se tiene que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $c_1 = c_2 = 0$. Esto muestra que y_1 e y_2 son linealmente independientes. Sin embargo

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} x^3 & |x^3| \\ 3x^2 & 3x|x| \end{pmatrix} = 3x^4|x| - 3x^2|x^3| = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

No obstante, cuando las funciones son soluciones de una ecuación lineal homogénea, que es el caso que a nosotros nos interesa, el recíproco de la proposición 3.1.7 sí es cierto. De hecho es cierto un resultado aparentemente más fuerte.

Teorema 3.1.10. *Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.7}$$

en un intervalo I, entonces $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $W[y_1, \ldots, y_n]$ no se anula en I.

Demostración. Sólo hay que demostrar que si el conjunto de soluciones es linealmente independiente entonces el wronskiano no se anula nunca. Supongamos que esto último no es cierto. Sea $x_0 \in$ el punto donde el wronskiano se anula. El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} c_1y_1(x_0) + \cdots\cdots\cdots + c_ny_n(x_0) & = & 0 \\ c_1y_1'(x_0) + \cdots\cdots\cdots + c_ny_n'(x_0) & = & 0 \\ \vdots \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots & & \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0 \end{array}$$

es precisamente el wronskiano en x_0 que estamos suponiendo que es nulo. Esto nos dice que el sistema tiene una solución $(c_1, \ldots, c_n)$ no nula. Por el principio de superposición la función

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$$

es una solución de (3.7). Esta solución verifica

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Por el corolario 3.0.5, $y \equiv 0$ lo que contradice el que $y_1, \ldots, y_n$ sean linealmente independientes. □

Corolario 3.1.11. *Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n (3.7) en un intervalo I, entonces el wronskiano $W[y_1, \ldots, y_n]$ o es idénticamente nulo o no se anula nunca en el intervalo I.*

Las funciones $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ muestran que el resultado precedente no es cierto si las funciones no son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Definición 3.1.12. Se denomina **conjunto fundamental de soluciones** de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, en un intervalo I, a cualquier conjunto de n soluciones de la ecuación linealmente independientes en I.

El corolario 3.1.8 se puede reformular en términos de conjuntos fundamentales de soluciones.

Teorema 3.1.13. *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ funciones continuas en un intervalo I. Existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n,*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

en el intervalo I.

El interés de los conjuntos fundamentales de soluciones reside en que con solo n funciones es posible determinar cualquier otra solución de la correspondiente ecuación diferencial lineal homogénea.

Teorema 3.1.14. *Si $y_1, \ldots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en un intervalo, entonces la solución general de la ecuación en dicho intervalo es*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n, \tag{3.8}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Demostración. Sea y una solución de la ecuación y sea x_0 un punto del intervalo del enunciado. El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{llll} c_1 y_1(x_0) + \cdots\cdots & + c_n y_n(x_0) & = y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + \cdots\cdots & + c_n y_n'(x_0) & = y'(x_0) \\ \vdots \qquad\qquad \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots & + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = y^{(n-1)}(x_0) \end{array}$$

es $W[y_1, \ldots, y_n](x_0)$ que es no nulo por hipótesis. Esto implica que el sistema tiene una solución $(c_1, \ldots, c_n)$. Por el principio de superposición la función

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

es una solución de la ecuación que, por la elección de $c_1, \ldots, c_n$, satisface las condiciones iniciales

$$z(x_0) = y(x_0), z'(x_0) = y'(x_0), \ldots, z^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

Se deduce del teorema 3.0.4 que $z = y$. $\square$

Hasta aquí hemos estudiado la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden n. Hemos visto que la solución general se puede obtener a partir de un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación completa. Sin embargo hasta ahora no hemos visto cómo se pueden encontrar dichas soluciones. Lamentablemente no existe un método general para resolver este tipo de ecuaciones. En las siguientes secciones vamos a estudiar algunos casos particulares para los que existen métodos que nos van a permitir o bien hallar directamente las soluciones de la ecuación o bien transformarla en otra más sencilla que sepamos resolver.

3.2. Reducción del orden de una ecuación diferencial lineal

En el capítulo precedente ya vimos algunos métodos para reducir el orden de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales no necesariamente lineales. Obviamente dichos métodos también son de aplicación al caso de ecuaciones diferenciales lineales. En esta sección vamos a estudiar un nuevo método de reducción del orden, específico para ecuaciones lineales, que da como resultado una nueva ecuación diferencial lineal de orden una unidad menor que el de la ecuación inicial. Este método requiere que se conozca de antemano una solución particular, no trivial, de la ecuación homogénea asociada.

Consideremos la ecuación de orden n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Sea y_1 una solución de la ecuación homogénea asociada. Si hacemos el cambio $y = y_1 z$, haciendo uso de la fórmula de Leibnitz para las derivadas de un producto se tiene que

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(x) z^{(j)}(x)$$

donde entendemos que la derivada de orden 0 de una función es la propia función. Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación diferencial se tiene

$$\begin{aligned} b(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)} z^{(j)} = \\ = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k(x) y_1^{(k-j)} \right) z^{(j)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

El coeficiente de z en la expresión anterior es

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_1^{(k)} = a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0$$

porque y_1 es una solución de la ecuación homogénea asociada. Teniendo en cuenta esto y denotando b_j al coeficiente de $z^{(j)}$, que es el término entre paréntesis que le precede, la ecuación (3.9) se puede escribir en la forma

$$b_n(x)z^{(n)} + b_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)z' = b(x).$$

Esta ecuación es del tipo estudiado en la sección 2.8.1. Haciendo el cambio $u = z'$ la ecuación anterior se transforma en

$$b_n(x)u^{(n-1)} + b_{n-1}(x)u^{(n-2)} + \cdots + b_1(x)u = b(x)$$

que es una ecuación diferencial lineal de orden $n-1$.

Este método es particularmente interesante en el caso de ecuaciones de orden 2 en las que es fácilmente reconocible una solución particular. En este caso el método reduce la ecuación a una ecuación diferencial lineal de primer orden que sabemos resolver.

Ejemplo 3.2.1. Se comprueba fácilmente que la función $y(x) = 1/x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$$

en $(0, +\infty)$. Para hallar otra solución de la ecuación en dicho intervalo vamos a aplicar el método de reducción que acabamos de ver.

Haciendo el cambio $y(x) = z(x)/x$ y teniendo en cuenta que

$$y'(x) = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2} \quad \text{e} \quad y''(x) = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + 2\frac{z(x)}{x^3}$$

la ecuación se puede poner en la forma

$$xz'' - 2z' + 2\frac{z}{x} - 2z' + 2\frac{z}{x} - 4\frac{z}{x} = xz'' - 4z' = 0$$

que haciendo el cambio $u = z'$ se transforma en

$$xu' - 4u = 0$$

cuya solución general es

$$u(x) = cx^4,$$

con c una constante real arbitraria. Como $z = u'$,

$$z(x) = ax^5 + b$$

con a y b constantes reales, luego

$$y(x) = ax^4 + \frac{b}{x}. \tag{3.10}$$

Obsérvese que haciendo $a = 0$ y $b = 1$ se obtiene la solución que ya conocíamos y que para cualquier valor no nulo de a se obtiene una solución linealmente independiente de aquella, por lo que (3.10) es la solución general de la ecuación.

3.3. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Como ya hemos comentado antes, en general, no es sencillo resolver una ecuación diferencial lineal, sin embargo en el caso particular en que los coeficientes son funciones constantes siempre es posible encontrar un conjunto fundamental de soluciones de una forma bastante directa.

La forma normal de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes es

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3.11}$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son constantes reales.

Como cualquier solución de la ecuación (3.11) es una combinación lineal de sus derivada sucesivas, parece razonable empezar a buscar soluciones de dicha ecuación entre aquellas funciones cuyas derivadas son del mismo tipo que ella. Este es el caso de funciones como las exponenciales, el seno y el coseno. En el capítulo precedente vimos que la ecuación diferencial lineal homogénea de orden uno con coeficiente constantes tenía precisamente una exponencial como solución.

Veamos pues qué condiciones ha de verificar una función de la forma $y(x) = e^{\lambda x}$ para poder ser una solución de (3.11). Si sustituimos la función anterior y sus derivadas en la ecuación se tiene, sacando factor común la exponencial, que

$$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = 0.$$

Como la exponencial no se anula nunca, la única posibilidad de que se satisfaga la ecuación anterior es que

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{3.12}$$

Esta última ecuación se denomina **ecuación característica** de la ecuación (3.11). El polinomio que aparece en lado izquierdo de la ecuación se dice que es el **polinomio característico** de la ecuación (3.11),

Teorema 3.3.1. *La función $y(x) = e^{\lambda x}$ es una solución de la ecuación (3.11) si, y sólo si, λ es una solución de su ecuación característica (3.12).*

Por este procedimiento hemos transformado el problema de encontrar soluciones de una ecuación diferencial en el problema de encontrar raíces de un polinomio. Aunque este último problema en la práctica no siempre es sencillo de resolver, el teorema fundamental del álgebra nos garantiza que un polinomio de grado n siempre tiene n raíces, no necesariamente distintas, complejas. Vamos a analizar las distintas situaciones que se pueden presentar según cómo sean las raíces del polinomio característico.

3.3.1. Raíces reales distintas

Supongamos que la ecuación característica (3.12) tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Según hemos visto más arriba, en este caso, las funciones

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \tag{3.13}$$

son soluciones de la ecuación diferencial (3.11). Su wronskiano es

$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

que no se anula porque el determinante último, que es un determinante de Vandermonde, vale

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0.$$

Esto demuestra que (3.13) es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.11).

Teorema 3.3.2. *Si las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la ecuación característica (3.12) son todas reales y distintas, entonces*

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{3.14}$$

es la solución general de la ecuación (3.11).

Ejemplo 3.3.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''' + 3y'' - 10y' = 0.$$

Su ecuación característica es

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 10\lambda = 0.$$

Es obvio que una raíz de esta ecuación es $\lambda = 0$. Las otras dos son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

que son

$$\lambda = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = 2 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2} = -5.$$

El teorema precedente nos dice que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-5x}.$$

3.3.2. Raíces reales de multiplicidad mayor que uno

Si alguna de las raíces de la ecuación característica aparece repetida, es decir si alguna raíz tiene multiplicidad mayor que uno, el procedimiento del apartado anterior no nos proporciona un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación. En este caso hemos de utilizar un método diferente para hallar las soluciones que nos faltan para formar un conjunto fundamental.

Si λ_1 es una raíz real de multiplicidad $m > 1$, haciendo uso de que, por lo visto en el apartado anterior, $e^{\lambda_1 x}$ es una solución de la ecuación (3.11) podemos hacer uso del método que hemos visto en la sección 3.2 para reducir el orden de la ecuación. Sea pues $y(z) = e^{\lambda_1 x} z(x)$. Reemplazando y y sus derivadas en la ecuación (3.11) se tiene, poniendo $a_n = 1$ y operando como en (3.9), que

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda_1^{k-j} e^{\lambda_1 x} \right) z^{(j)} = 0$$

o, dividiendo por $e^{\lambda_1 x}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda_1^{k-j} \right) z^{(j)} = 0.$$

Esta es una ecuación lineal homogénea de coeficientes contantes

$$b_n z^{(n)} + \cdots + b_1 z' + b_0 z = 0 \tag{3.15}$$

donde

$$b_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda_1^{k-j}. \tag{3.16}$$

Si denotamos por P al polinomio característico de (3.11), es decir si

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k,$$

donde $a_n = 1$, se verifica que, si $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$P^{(j)}(\lambda) = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)\dots(k-j+1)a_k\lambda^{k-j}$$

luego

$$\frac{P^{(j)}(\lambda)}{j!} = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda^{k-j}.$$

En particular

$$\frac{P^{(j)}(\lambda_1)}{j!} = b_j.$$

Por ser λ_1 una raíz de P de multiplicidad m, se verifica que

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda_1) = 0 \quad \text{y} \quad P^{(m)}(\lambda_1) \neq 0$$

luego $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-1} = 0$. Teniendo lo anterior en cuenta podemos escribir la ecuación (3.15) en la forma

$$b_n z^{(n)} + \cdots + b_m z^{(m)} = 0. \tag{3.17}$$

Es evidente que cualquier polinomio de grado menor que m es solución de esta ecuación. En particular las funciones $1, x, \dots, x^{m-1}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación. Deshaciendo el cambio que hicimos al principio llegamos a que las funciones

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$$

son m soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Teorema 3.3.4. *Si λ_1 es una raíz real de la ecuación característica (3.12), de multiplicidad $m > 1$, entonces las funciones*

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$$

son m soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Se comprueba sin excesiva dificultad que los conjuntos de soluciones formados por soluciones de los tipos indicados en la sección 3.3.1 y el teorema 3.3.4 para distintas raíces de la ecuación característica son linealmente independientes.

Ejemplo 3.3.5. Consideremos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{3.18}$$

La ecuación característica de la ecuación (3.18) es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$$

que tiene una única raíz $\lambda = -1$ de multiplicidad 2. El teorema precedente nos dice que las funciones e^{-x} y xe^{-x} forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.18). En consecuencia la solución general de dicha ecuación será

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Ejemplo 3.3.6. La ecuación diferencial lineal de orden 5

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0 \tag{3.19}$$

tiene como ecuación característica la ecuación

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1\right) = \lambda^2(\lambda - 1)^3 = 0$$

que tiene dos raíces $\lambda = 0$, de multiplicidad 2, y $\lambda = 1$, de multiplicidad 3. Se deduce del teorema 3.3.4 que las funciones

$$1, \quad x, \quad e^x, \quad xe^x \quad \text{y} \quad x^2 e^x$$

son soluciones de la ecuación (3.19). En consecuencia la solución general de ecuación es

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_5 x^2 e^x$$

donde $c_1, \ldots, c_5$ son constantes reales arbitrarias.

3.3.3. Raíces complejas simples

Antes de comenzar el estudio de este caso vamos a recordar algunos conceptos. Una función z definida en un intervalo I de la recta real y que toma valores complejos puede ser vista como un par de funciones reales (u, v) definidas en I de manera que $z(x) = u(x) + iv(x)$. La función u se dice que es la **parte real** de la función z y v se dice que es la **parte imaginaria**. La función z se dice que es derivable en $x \in I$ si lo son u y v y, en este caso, se define su derivada en x como $z'(x) = u'(x) + iv'(x)$, Con esta definición de derivada de una función compleja tiene sentido que ampliemos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales a las funciones complejas. Resulta obvio que z es una solución de la ecuación (3.11) si, y sólo si, lo son su parte real y su parte imaginaria.

Recordemos también que, haciendo uso de la fórmula de Euler, la exponencial de un número complejo λ, $\lambda = \alpha + i\beta$, α y β reales,[3] se puede expresar como

$$e^{\lambda} = e^{\alpha}\left(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta\right).$$

Haciendo uso de esta expresión se tiene que para $\lambda = \alpha + \beta i$, la función

$$z(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es

$$\begin{aligned} z'(x) =& \big(\alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\big) + i\big(\alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)\big) \\ =& e^{\alpha x}\Big[\big(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)\big) + i\big(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)\big)\Big] \\ =& \lambda e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x)\big) = \lambda z(x). \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso se tiene que

$$z^{(j)} = \lambda^j z, \qquad j = 1, 2, \dots.$$

Esto nos dice que las fórmulas de las derivadas sucesivas de la exponencial compleja son las mismas que las de la exponencial real. Por lo tanto, el argumento que hicimos al principio de esta sección para exponenciales reales sigue siendo válido para exponenciales complejas y el teorema 3.3.1 sigue siendo cierto cuando λ es un número complejo.

Teorema 3.3.7. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. La función $e^{\lambda x}$ es una solución de la ecuación (3.11) si, y sólo si, λ es una solución de su ecuación característica (3.12).*

De modo que si λ es una solución compleja de la ecuación característica (3.12), la función $z(x) = e^{\lambda x}$ es una solución compleja de la ecuación (3.11) y, por lo visto más arriba, sus partes real e imaginaria son soluciones reales de la ecuación (3.11).

[3] Siempre que expresemos un número complejo en la forma $\alpha + \beta i$ consideraremos que α y β son reales salvo mención expresa de lo contrario.

Teorema 3.3.8. *Si la ecuación característica (3.12) tiene una raíz compleja simple, $\lambda = \alpha + i\beta$, entonces las funciones*

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad y \quad e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \tag{3.20}$$

son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Observación 3.3.9. Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja $\lambda = \alpha + i\beta$ entonces $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es raíz del polinomio. En consecuencia las raíces complejas, no reales, aparecen siempre en un número par.

Si P es el polinomio característico de la ecuación (3.11) y λ es una raíz de P, como las exponenciales $e^{\lambda x}$ y $e^{\overline{\lambda} x}$ también son conjugadas, sus partes reales coinciden y sus partes imaginarias son opuestas. En consecuencia ambas raíces generan el mismo subespacio vectorial de soluciones de la ecuación (3.11) y por lo tanto para obtener soluciones linealmente independientes sólo hay que aplicar el teorema precedente a λ o a su conjugado.

Ejemplo 3.3.10. La ecuación diferencial

$$4y'' + 4y' + 5y = 0 \tag{3.21}$$

tiene como ecuación característica la ecuación

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

que no posee raíces reales. Sus raíces complejas son

$$\lambda_1 = \frac{-2+4i}{4} = -\frac{1}{2} + i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-2-4i}{4} = -\frac{1}{2} - i.$$

Se deduce del teorema precedente que la solución general de la ecuación (3.21) es

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right].$$

3.3.4. Raíces complejas de multiplicidad mayor que uno

El mismo argumento del apartado 3.3.2 muestra que si $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de multiplicidad $m > 1$, entonces las funciones

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$$

son m soluciones complejas de la ecuación (3.11). Por lo tanto, las partes reales e imaginarias de estas funciones son $2m$ soluciones reales de la ecuación. Se comprueba fácilmente que dichas soluciones son linealmente independientes.

Teorema 3.3.11. *Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de la ecuación característica (3.12), de multiplicidad $m > 1$, entonces las $2m$ funciones*

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

y

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Ejemplo 3.3.12. La ecuación diferencial

$$y^{(4)} + 12y^{(3)} + 62y'' + 156y' + 169y = 0 \tag{3.22}$$

tiene como ecuación característica

$$\lambda^4 + 12\lambda^3 + 62\lambda^2 + 156\lambda + 169 = 0$$

que puede escribirse también, completando cuadrados,

$$\left(\lambda^2 + 6\lambda\right)^2 + 26\left(\lambda^2 + 6\lambda\right) + 13^2 = \left(\lambda^2 + 6\lambda + 13\right)^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene dos raíces complejas dobles

$$\lambda_1 = -3 + 2i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3 - 2i.$$

Por el teorema precedente, la solución general de la ecuación (3.22) es

$$y(x) = e^{-3x}\Big[\big(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x\big) + x\big(c_3\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x\big)\Big].$$

3.4. Método de variación de las constantes

En esta sección vamos a describir un método para hallar una solución particular de la ecuación completa a partir de la solución de la ecuación homogénea asociada. El método es análogo al método del mismo nombre, que vimos en 2.5, para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Si $y_1, \ldots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{3.23}$$

buscamos soluciones de esta ecuación de la forma

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x).$$

Vamos a imponer una serie de condiciones sobre las funciones $u_1, \dots, u_n$ de manera que se simplifiquen los cálculos con la función y. Así, si suponemos que

$$u_1'(x)y_1(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) = 0 \tag{3.24}$$

la derivada de y es

$$\begin{aligned} y'(x) =& u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) + u_n(x)y_n'(x) \\ =& u_1'(x)y_1(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) + u_1(x)y_1'(x) + \cdots + u_n(x)y_n'(x) \\ =& u_1(x)y_1'(x) + \cdots + u_n(x)y_n'(x). \end{aligned} \tag{3.25}$$

De manera análoga se comprueba que si, para $1 \leqslant k < n-1$, imponemos la condición

$$u_1'(x)y_1^{(k)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(k)}(x) = 0, \tag{3.26}$$

entonces

$$y^{(k+1)}(x) = u_1(x)y_1^{(k+1)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(k+1)}(x). \tag{3.27}$$

Por último, si pedimos que

$$u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x) \tag{3.28}$$

se comprueba de la misma manera que

$$y^{(n)}(x) = u_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(n)}(x) + b(x). \tag{3.29}$$

Si existen funciones $u_1, \dots, u_n$ que verifiquen las condiciones (3.24), (3.26) y (3.28) entonces

$$\begin{aligned} y^{(n)} +& a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k(x)y_k^{(n)} + b(x) + a_{n-1}(x)\sum_{k=0}^{n} u_k(x)y_k^{(n-1)} + \cdots \\ &\quad \cdots + a_1(x)\sum_{k=0}^{n} u_k(x)y_k' + a_0(x)\sum_{k=0}^{n} u_k(x)y_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\left(y_k^{(n)} + a_{n-1}(x)y_k^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_k' + a_0(x)y_k\right) + b(x) \\ &= b(x) \end{aligned}$$

porque las funciones y_k son soluciones de la ecuación homogénea. En consecuencia, la función y es solución de la ecuación (3.23). Por tanto, sólo queda demostrar que existen funciones $u_1, \ldots, u_n$ que satisfacen las condiciones (3.24), (3.26) y(3.28) y hallarlas. Es decir, hay que demostrar que el sistema

$$\begin{aligned}
u_1'(x)y_1(x) + \cdots\cdots\cdots + u_n'(x)y_n(x) \qquad &= 0\\
u_1'(x)y_1'(x) + \cdots\cdots\cdots + u_n'(x)y_n'(x) \qquad &= 0\\
\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots\\
u_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots\cdots + u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0\\
u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots\cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= b(x)
\end{aligned}$$

tiene solución y hallarla. Como el determinante de la matriz asociada al sistema es

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = W[y_1, \ldots, y_n](x),$$

que es no nulo porque $y_1, \ldots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones, el sistema tiene una única solución $(u_1'(x), \ldots, u_n'(x))$,

$$u_k'(x) = (-1)^{n+k} b(x) \frac{W_k[y_1, \ldots, y_n](x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{3.30}$$

donde $W_k[y_1, \ldots, y_n]$ denota el wronskiano de las funciones y_j, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq k$. Para obtener las funciones u_k basta con calcular una primitiva de la función de la derecha en (3.30).

Ejemplo 3.4.1. La ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \tag{3.31}$$

tiene como ecuación característica

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \tag{3.32}$$

que tiene una solución real $\lambda = 0$ y dos complejas $\lambda = \pm i$. En consecuencia un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea está formado por las funciones

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x$$

y

$$W[1, \cos x, \operatorname{sen} x] = \det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} = 1$$

El método de variación de las constantes nos dice que podemos obtener una solución particular de la ecuación (3.31) de la forma

$$y_p(x) = u_1(x) + u_2(x)\cos x + u_3(x)\operatorname{sen} x$$

si u_1, u_2 y u_3 satisfacen:

$$\begin{aligned} u_1'(x) + u_2'(x)\cos x + u_3'(x)\operatorname{sen} x &= 0 \\ -u_2'(x)\operatorname{sen} x + u_3'(x)\cos x &= 0 \\ -u_2'(x)\cos x - u_3'(x)\operatorname{sen} x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Esto ocurre si

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \operatorname{tg} x \cdot \det\begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = \operatorname{tg} x \\ u_2'(x) &= -\operatorname{tg} x \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} x \\ 0 & \cos x \end{pmatrix} = -\operatorname{sen} x \\ u_3'(x) &= \operatorname{tg} x \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \cos x \\ 0 & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} = -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Basta por tanto elegir

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\log(\cos x) \\ u_2(x) &= \cos x \\ u_3(x) &= \log\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right) + \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

para obtener la solución particular de (3.31), en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\log(\cos x) + \cos^2 x + \operatorname{sen} x\left[\log\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right) + \operatorname{sen} x\right] \\ &= 1 - \log(\cos x) - \operatorname{sen} x \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right). \end{aligned}$$

Se deduce de 3.1.1 que la solución general de la ecuación (3.31) en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es

$$y(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x - \log(\cos x) - \operatorname{sen} x \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes reales arbitrarias.

Observación 3.4.2. El método de variación de las constantes sirve para obtener una solución particular de una ecuación diferencial lineal cualquiera siempre que se conozca la solución general de la ecuación homogénea asociada. En la práctica, si la ecuación no es de coeficientes constantes, el método puede no ser aplicable porque no sea posible, o sea muy complicado, obtener la solución general de la ecuación homogénea asociada

3.5. Método de los coeficientes indeterminados

El método de variación de las constantes es interesante porque siempre proporciona una solución particular de la ecuación completa supuesto conocido un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada. Sin embargo tiene el inconveniente de que a menudo aparecen primitivas que no son fáciles de calcular.

En esta sección vamos a ver un método para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x). \tag{3.33}$$

A diferencia del método que hemos visto en la sección previa que valía cualquiera que fuese la función b, este método sólo es válido cuando b es un polinomio, una función exponencial, un seno, un coseno, productos de los tipos previos o combinaciones lineales de todos ellos. La idea subyacente en este método es que todas estas funciones tiene derivadas que son también de uno de esos tipos por lo que parece razonable buscar soluciones similares a la función b.

Teorema 3.5.1 (Método de los coeficientes indeterminados). *Si b es una función de la forma*

$$b(x) = e^{\alpha x}\big(P(x)\cos\beta x + Q(x)\operatorname{sen}\beta x\big) \tag{3.34}$$

donde α y β son números reales, P es un polinomio de grado k_1 y Q es un polinomio de grado k_2, entonces existen dos polinomios de grado $k = \max(k_1, k_2)$, P_1 y Q_1, tales que la función

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + Q_1(x)\operatorname{sen}\beta x) \tag{3.35}$$

donde m es la multiplicidad de $\lambda = \alpha + \beta i$ como raíz de la ecuación característica,[4] es una solución particular de la ecuación (3.33).

Demostración. Por el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas, 3.1.4, para hallar una solución particular de (3.33) es suficiente con encontrar soluciones particulares, u_p y v_p de las ecuaciones

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x}\big(P(x)\cos\beta x\big)$$

y

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x}\big(Q(x)\operatorname{sen}\beta x\big).$$

respectivamente. En este caso, la función $y_p = u_p + v_p$ es una solución de (3.33). Por otra parte, como el término de la derecha de la primera ecuación

[4] Si λ no es una raíz de la ecuación característica se considera que $m = 0$.

es la parte real de la función $P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ y el de la segunda es la parte imaginaria de la función $Q(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$, según vimos en 3.3.3, es suficiente con demostrar que la ecuación diferencial compleja

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = e^{\lambda x}R(x) \tag{3.36}$$

donde R es un polinomio real, tiene una solución particular de la forma

$$x^m e^{\lambda x}R_1(x)$$

con R_1 un polinomio del mismo grado que R.

Haciendo el cambio $y = e^{\lambda x}z_p$, el argumento hecho en 3.3.2 demuestra que y_p es una solución de (3.36) si, y solo si, z_p es una solución particular de la ecuación

$$b_n z^{(n)} + \cdots + b_m z^{(m)} = R(x) \tag{3.37}$$

donde $b_m, \ldots, b_n$ son como en (3.16). En particular $b_m \neq 0$.

Un polinomio z_p de la forma

$$z_p(x) = A_0x^m + A_1x^{m+1} + \cdots + A_kx^{m+k}$$

es solución de la ecuación (3.37) si, y sólo si, los polinomios

$$T(x) = b_n z_p^{(n)}(x) + \cdots + b_m z_p^{(m)}(x)$$

y R son iguales o, equivalentemente, si tienen los mismos coeficientes. El polinomio T es de grado menor o igual que k y, para $j = 0, 1, \ldots, k$, el coeficiente de la potencia j-ésima de T es

$$\begin{aligned}\frac{T^{(j)}(0)}{j!} &= \frac{1}{j!}\left(b_n z_p^{(n+j)}(0) + \cdots + b_m z_p^{(m+j)}(0)\right) \\ &= \frac{1}{j!}\left(b_n(n+j)!A_{n+j-m} + \cdots + b_m(m+j)!A_j\right)\end{aligned}$$

donde $A_i = 0$ si $i > k$. Luego si

$$R(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$$

z_p es solución de (3.37) si, y sólo si, para $0 \leqslant j \leqslant k$

$$c_j = \frac{1}{j!}\big(b_m(m+j)!A_j + b_{m+1}(m+j+1)!A_{j+1} + \cdots + b_n(n+j)!A_{n+j-m}\big).$$

Estas ecuaciones forman un sistema de $k+1$ ecuaciones y $k+1$ incógnitas $A_0, \ldots, A_k$ (recuérdese que $A_i = 0$ si $i > k$) que tiene asociada una matriz triangular de la forma

$$\begin{pmatrix} b_m m! & & & & & \\ 0 & b_m(m+1)! & & & & \\ 0 & 0 & b_m\frac{(m+2)!}{2!} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m\frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & b_m\frac{(m+k)!}{k!} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es no nulo porque $b_m \neq 0$. Esto nos dice que el sistema tiene solución y por lo tanto que existe una elección de los coeficientes $A_0, \dots, A_k$ que hacen que z_p sea una solución de (3.37). $\square$

Como se ve en la demostración del teorema precedente el método en última instancia consiste en determinar los coeficientes de los polinomios que aparecen en (3.35) para que y_p sea una solución de (3.33).

Si la función b es una combinación lineal de funciones del tipo indicado en el teorema, basta aplicar el teorema para cada una de esas funciones y aplicar el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 3.1.4).

Una vez que hemos visto la validez del método vamos a ver, mediante un a serie de ejemplos, cómo se aplica el método según en los distintos casos particulares de la función b.

3.5.1. Caso de polinomios y exponenciales

Comenzaremos considerando el caso de polinomios, exponenciales y sus productos. Este es el caso en que la función b es de la forma

$$b(x) = e^{\alpha x} P(x)$$

donde P es un polinomio de grado k. Este es el caso particular de (3.34) cuando $\beta = 0$. La solución particular (3.35) se reduce a

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x^m P_1(x)$$

donde m es la multiplicidad de $\lambda = \alpha$ como raíz de la ecuación característica, cero si no es raíz, y P_1 es un polinomio de grado k. Obsérvese que cuando b es un polinomio $\alpha = 0$ por lo que habrá que considerar la multiplicidad de $\lambda = 0$ como raíz de la ecuación característica.

Ejemplo 3.5.2. Queremos encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1. \tag{3.38}$$

Comenzaremos buscando la solución general de la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

que tiene las raíces

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}.$$

Para calcular una solución particular de (3.38), utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados. Como, en este caso,

$$b(x) = 2x^2 + 1$$

que es un polinomio de grado 2 y 0 no es una solución de la ecuación característica, la solución particular ha de tener la forma

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2.$$

Como las dos primeras derivadas de esta función son

$$y_p'(x) = A_1 + 2A_2 x \quad \text{e} \quad y_p''(x) = 2A_2,$$

sustituyendo en la ecuación diferencial (3.38) se tiene que

$$2A_2 - 3(A_1 + 2A_2 x) + 2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = 2x^2 + 1$$

o

$$2A_2 - 3A_1 + 2A_0 + (-6A_2 + 2A_1)x + 2A_2 x^2 = 2x^2 + 1.$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} 2A_2 - 3A_1 + 2A_0 &= 1 \\ -6A_2 + 2A_1 &= 0 \\ 2A_2 &= 2 \end{aligned}$$

luego $A_2 = 1$, $A_1 = 3$ y $A_0 = 4$. En consecuencia

$$y_p(x) = x^2 + 3x + 4$$

y la solución general de (3.38) es

$$y(x) = x^2 + 3x + 4 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}.$$

Ejemplo 3.5.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' = 2x^2 + 1. \tag{3.39}$$

La ecuación característica en este caso es

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

que tiene las raíces $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$. Como 0 es una raíz de multiplicidad 1 de la ecuación característica, hemos de buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2).$$

Derivando se tiene que

$$y_p'(x) = A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 \quad \text{e} \quad y_p''(x) = 2A_1 + 6A_2x$$

y sustituyendo en (3.39) se tiene que

$$2A_1 + 6A_2x - 3(A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2) = 2x^2 + 1.$$

Por último, igualando coeficientes

$$\begin{aligned} 2A_1 - 3A_0 &= 1 \\ 6A_2 - 6A_1 &= 0 \\ -9A_2 &= 2 \end{aligned}$$

de donde sale que $A_2 = A_1 = -\frac{2}{9}$ y $A_0 = \frac{13}{27}$. En consecuencia

$$y_p(x) = x\left(\frac{13}{27} - \frac{2}{9}x - \frac{2}{9}x^2\right)$$

es una solución particular de la ecuación (3.39).

Ejemplo 3.5.4. Consideramos la ecuación diferencial

$$y'' + y = e^{-x}. \tag{3.40}$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

que tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm i$. La solución particular que buscamos tiene la forma

$$y_p(x) = Ae^{-x}.$$

Sustituyendo en (3.40) se tiene que

$$Ae^{-x} + Ae^{-x} = e^{-x}$$

de donde se concluye que $A = \frac{1}{2}$. En consecuencia

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

es una solución particular de (3.40).

Ejemplo 3.5.5. La ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^x \tag{3.41}$$

tiene como ecuación característica

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

que tiene una única raíz $\lambda = 1$ triple. La solución particular que buscamos, haciendo uso del método de los coeficientes indeterminados, es de la forma

$$y_p(x) = Ax^3e^x.$$

Sus derivadas son

$$\begin{aligned} y_p'(x) =& Ae^x(3x^2 + x^3), \\ y_p''(x) =& Ae^x(6x + 6x^2 + x^3) \\ y_p'''(x) =& Ae^x(6 + 18x + 9x^2 + x^3) \end{aligned}$$

que sustituyendo en (3.41) nos dan que

$$\begin{aligned} Ae^x \left[6 + 18x + 9x^2 + x^3 - 3(6x + 6x^2 + x^3) + 3(3x^2 + x^3) - x^3\right] = \\ = 6Ae^x = 4e^x \end{aligned}$$

de donde se deduce que $A = \frac{2}{3}$. En consecuencia

$$y_p(x) = \frac{2}{3}x^3e^x$$

es una solución particular de la ecuación (3.41).

Obsérvese que las funciones e^x, xe^x y x^2e^x son soluciones de la ecuación homogénea asociada a (3.41), por lo que ninguna de ellas puede ser solución de la ecuación completa. Por este motivo, al buscar la solución particular es preciso considerar la multiplicidad de la raíz 1 en la ecuación característica e introducir el factor x^3 en la solución buscada.

Como hemos indicado más arriba, cuando la función b es una combinación lineal de productos de polinomios y exponenciales se buscan soluciones para cada uno de los productos y se emplea el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas.

Ejemplo 3.5.6. Para hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' - y' = x^3 + x + e^{2x} - 2xe^{2x} \tag{3.42}$$

vamos a hallar una solución particular de la ecuación con $b(x) = x^3 + x$ y otra para la ecuación con $b(x) = (1 - 2x)e^{2x}$. Por el principio de superposición, 3.1.4, la suma de las anteriores soluciones es una solución de (3.42). La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a (3.42) es

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

que tiene dos soluciones $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Para el caso de $b(x) = x^3 + x$ como $\lambda = 0$ es una raíz simple de la ecuación característica la solución particular buscada es de la forma

$$y_1(x) = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3).$$

Sus derivadas son

$$y_1'(x) = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 + 4A_3 x^3, \quad y_1''(x) = 2A_1 + 6A_2 x + 12A_3 x^2$$

que trasladadas a la correspondiente ecuación nos dan

$$2A_1 + 6A_2 x + 12A_3 x^2 - (A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 + 4A_3 x^3) = x^3 + x$$

e identificando coeficientes

$$\begin{aligned} 2A_1 - A_0 &= 0 & \qquad 6A_2 - 2A_1 &= 1 \\ 12A_3 - 3A_2 &= 0 & \qquad -4A_3 &= 1 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $A_3 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = -1$, $A_1 = -\frac{7}{2}$ y $A_0 = -7$.

Para $b(x) = (1-2x)e^{2x}$, buscamos una solución particular y_2 de la forma

$$y_2(x) = e^{2x}(A_4 + A_5 x),$$

Derivando tenemos que

$$y_2'(x) = e^{2x}(2A_4 + A_5 + 2A_5 x), \quad y_2''(x) = 4e^{2x}(A_4 + A_5 + A_5 x)$$

que sustituidas en la correspondiente ecuación nos dan

$$e^{2x}\left[4(A_4 + A_5 + A_5 x) - (2A_4 + A_5 + 2A_5 x)\right] = e^{2x}(1 - 2x).$$

Dividiendo ambos miembros e identificando coeficientes se llega a

$$2A_4 + 3A_5 = 1 \qquad 2A_5 = -2$$

de donde $A_5 = -1$ y $A_4 = 2$.

Sumando ambas soluciones se obtiene

$$y_p(x) = -x\left(7 + \frac{7}{2}x + x^2 + \frac{1}{4}x^3\right) + e^{2x}(2 - x)$$

que, por el principio de superposición 3.1.4, es una solución particular de la ecuación (3.42).

3.5.2. Caso de polinomios y funciones seno y coseno

Vamos ahora a considerar el caso de funciones senos y cosenos y productos de estas funciones por polinomios. En este caso b es de la forma

$$b(x) = P(x)\cos\beta x + Q(x)\operatorname{sen}\beta x$$

donde P es un polinomio de grado k_1 y Q es un polinomio de grado k_2 y la solución particular (3.35) es de la forma

$$y_p(x) = x^m(P_1(x)\cos\beta x + Q_1(x)\operatorname{sen}\beta x)$$

donde m es la multiplicidad de $\lambda = \beta i$ como raíz de la ecuación característica y P_1 y Q_1 son dos polinomios de grado $k = \max(k_1, k_2)$.

Ejemplo 3.5.7. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$y'' - y' + y = 2\operatorname{sen}3x \tag{3.43}$$

es

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

que tiene dos soluciones complejas $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Como $3i$ no es una raíz de la ecuación característica buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A\cos 3x + B\operatorname{sen}3x.$$

Derivando

$$y_p'(x) = -3(A\operatorname{sen}3x - B\cos 3x) \quad \text{e} \quad y_p''(x) = -9(A\cos 3x + B\operatorname{sen}3x),$$

substituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} &-9(A\cos 3x + B\operatorname{sen}3x) + 3(A\operatorname{sen}3x - B\cos 3x) + \\ &\qquad\qquad + A\cos 3x + B\operatorname{sen}3x = 2\operatorname{sen}3x, \end{aligned}$$

e igualando coeficientes, se obtiene que

$$\begin{aligned} -8A - 3B &= 0 \\ 3A - 8B &= 2 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$. Por lo tanto una solución particular de la ecuación (3.43) es

$$y_p(x) = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\operatorname{sen}3x.$$

Como el ejemplo precedente muestra, aunque la función b sólo tenga un factor en senos el método de los coeficientes indeterminados requiere que en la solución particular aparezca también un factor en cosenos.

Ejemplo 3.5.8. Consideremos la ecuación diferencial

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = x \operatorname{sen} 2x + x^2 \cos 2x \tag{3.44}$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm 2i$ de multiplicidad 2. La solución particular que buscamos es de la forma

$$y_p(x) = x^2\big[\big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\big)\cos 2x + \big(B_0 + B_1 x + B_2 x^2\big)\operatorname{sen} 2x\big].$$

En este caso los cálculos, aunque igual de sencillos que en los ejemplos anteriores, son excesivamente largos por lo que es conveniente, en lugar de derivar, sustituir en la ecuación e igualar coeficientes, buscar algún procedimiento que simplifique los cálculos. En casos como este es conveniente proceder como en la demostración del teorema dividiendo el problema en dos y eliminando de los cálculos las funciones trigonométricas. Consideremos en primer lugar la ecuación diferencial

$$z^{(4)} + 8z'' + 16z = xe^{2xi}. \tag{3.45}$$

Si z_1 es una solución de esta ecuación entonces $y_1 = \operatorname{Im} z_1$, la parte imaginaria de z_1, es una solución de la ecuación

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = x \operatorname{sen} 2x. \tag{3.46}$$

Haciendo el cambio $z(x) = w(x)e^{2ix}$, y operando de manera análoga a como lo hicimos en el caso real en 3.3.2, la ecuación (3.45) se transforma en la ecuación

$$w^{(4)} + b_3 w^{(3)} + b_2 w'' = x, \tag{3.47}$$

donde $j!b_j$ es la derivada j-ésima del polinomio característico en $2i$, es decir

$$b_2 = \frac{4\big(3(2i)^2 + 4\big)}{2!} = -16 \quad \text{y} \quad b_3 = \frac{24(2i)}{3!} = 8i.$$

Haciendo un nuevo cambio $v = w''$, la ecuación (3.47) se transforma en la ecuación

$$v'' + 8iv' - 16v = x.$$

Como 0 no es una raíz del polinomio característico de esta ecuación, tendrá una solución particular de la forma

$$v_p(x) = C_0 + C_1 x.$$

Derivando, sustituyendo en la ecuación e igualando coeficientes se llega a que $C_1 = -\frac{1}{16}$ y $C_0 = -\frac{i}{32}$. Integrando dos veces se tiene que la función

$$w_p(x) = \frac{C_0}{2}x^2 + \frac{C_1}{6} = -\frac{i}{64}x^2 - \frac{1}{96}x^3$$

es una solución particular de la ecuación (3.47). Por último, la función

$$y_1 = \mathrm{Im}\big(w_p(x)e^{2ix}\big) = -\frac{1}{64}x^2\cos 2x - \frac{1}{96}x^3\operatorname{sen} 2x$$

es una solución particular de la ecuación (3.46).

Análogamente, si z_2 es una solución de la ecuación

$$z^{(4)} + 8z'' + 16z = x^2e^{2xi}$$

entonces su parte real y_2 es una solución particular de la ecuación

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = x^2\cos 2x. \tag{3.48}$$

Razonando de forma análoga a la de la primera parte del ejemplo, se llega a que

$$y_2(x) = \left(\frac{3}{256}x^2 - \frac{1}{192}x^4\right)\cos 2x + \frac{x^3}{96}\operatorname{sen} 2x.$$

es una solución de (3.48). Por el principio de superposición se tiene que

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = -\left(\frac{x^2}{256} + \frac{x^4}{192}\right)\cos 2x$$

es una solución particular de (3.44).

3.5.3. Caso general

Concluimos esta sección con un par de ejemplos en los que en la función de entrada b aparecen polinomios, exponenciales y funciones seno y coseno.

Ejemplo 3.5.9. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}\cos 2x \tag{3.49}$$

es

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

que tiene dos raíces

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Aplicando el teorema 3.5.1 se sabe que la ecuación (3.49) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{-x}\big((A_0 + A_1x)\cos 2x + (B_0 + B_1x)\operatorname{sen} 2x\big).$$

Los coeficientes A_0, A_1, B_0 y B_1 se calculan como en los ejemplos precedentes.

Ejemplo 3.5.10. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = x^3 e^{-x} \operatorname{sen} 2x \tag{3.50}$$

es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

que tiene dos raíces

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{25 - 9}\, i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Aplicando el teorema 3.5.1, se tiene que la ecuación (3.50) tiene una solución particular de la forma

$$\begin{aligned} &y_p(x) = \\ &= xe^{-x}\big((A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3)\cos 2x+(B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3)\operatorname{sen} 2x\big). \end{aligned}$$

Los coeficientes $A_0, \ldots, A_3, B_0, \ldots, B_3$ se calculan como en los ejemplos precedentes.

3.6. Oscilaciones mecánicas

El ejemplo más sencillo de un sistema mecánico en el que se producen oscilaciones es un muelle o resorte del que cuelga verticalmente un objeto pesado (véase la figura 3.1). Supondremos que el objeto únicamente se mueve verticalmente sin torsión. El movimiento del objeto viene determinado por

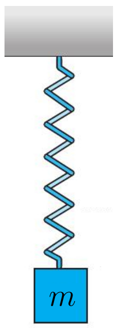

Figura 3.1: Muelle vertical

las diversas fuerzas que actúan sobre él. Entre estas están la fuerza de la gravedad, la fuerza recuperadora del muelle, la fuerza de amortiguación que ejerce el medio y, eventualmente, las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Vamos a analizar cada una de estas fuerzas y su efecto en el movimiento del objeto. Consideraremos que las fuerzas y los desplazamientos son positivos si están dirigidos hacia abajo y negativos en caso contrario. Además vamos a considerar como punto de referencia para medir el desplazamiento del muelle cuando se estira o se contrae la posición en que se encuentra su extremo inferior cuando no hay ningún objeto colgando de él. En este caso, al desplazamiento del extremo inferior del muelle respecto a ese punto de referencia lo vamos a denotar por x.

Fuerza de la gravedad. Si el objeto tiene masa m, la fuerza de la gravedad que actúa sobre él viene dado por

$$F_g = mg \tag{3.51}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Como esta fuerza actúa hacia abajo es positiva.

Fuerza recuperadora. La fuerza que ejerce el muelle en oposición a cualquier fuerza que lo estira o contrae se denomina **fuerza de restitución o recuperadora**. Esta fuerza, que depende del desplazamiento, la vamos a denotar F_r. La **ley de Hooke** establece que la fuerza recuperadora es proporcional al desplazamiento. Así, si x es el desplazamiento del muelle

$$F_r(x) = -kx \tag{3.52}$$

donde k es una constante positiva que depende del material del que está hecho el resorte. Esta constante se denomina **constante de elasticidad** y mide el grado de elasticidad o rigidez del resorte. El signo negativo aparece porque la fuerza de restitución actúa en sentido opuesto al del desplazamiento del muelle.

Para determinar la constante k es suficiente con calcular el efecto que produce un cuerpo de masa m colgado del muelle. Cuando se cuelga un objeto del muelle este sufre un desplazamiento por efecto del peso del objeto que es contrarrestado por la fuerza recuperadora de manera que al cabo de un cierto tiempo el muelle queda parado en una posición de equilibrio. En este estado el muelle se habrá desplazado a una distancia x_0 como aparece en la figura 3.2. En la posición de equilibrio la fuerza recuperadora compensa

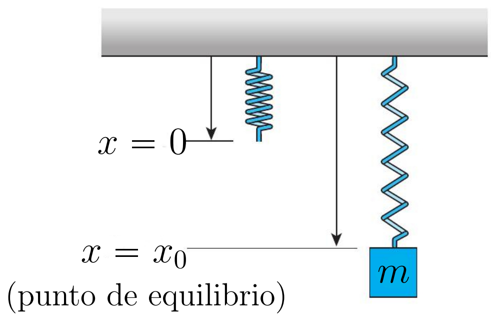

Figura 3.2: Punto de equilibrio de un muelle vertical

la fuerza gravitatoria luego

$$F_r(x_0) + F_g = -kx_0 + mg = 0 \tag{3.53}$$

de donde se deduce que

$$k = \frac{mg}{x_0}. \tag{3.54}$$

Fuerza de amortiguamiento. En la práctica siempre existen fuerzas de fricción o rozamiento que ejercen una resistencia al movimiento del muelle. Esta fuerza, que denotaremos F_a, se conoce con el nombre de **fuerza de amortiguamiento**. Depende de diversos factores, principalmente de la velocidad del movimiento. Nosotros supondremos que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad

$$F_a = -\mu v \tag{3.55}$$

donde $v = x'$ es la velocidad y μ es una constante positiva que se denomina **constante de amortiguamiento**. El signo negativo es debe a que esta fuerza actúa en sentido opuesto al del movimiento.

Fuerzas externas. Denotaremos por F_e cualquier otra fuerza externa que pueda actuar sobre el sistema.

Resumiendo lo anterior tenemos que la fuerza resultante F que actúa sobre el sistema es la suma de las cuatro fuerzas anteriores

$$F = F_g + F_r + F_a + F_e$$

que, aplicando la segunda ley de Newton y las expresiones de las distintas fuerzas que hemos visto antes, se transforma en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - \mu\frac{dx}{dt} + F_e(t). \tag{3.56}$$

De la ecuación (3.54) se deduce que $mg = -kx_0$, que sustituyendo en la ecuación precedente y reordenando los términos da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + k(x - x_0) = F_e(t). \tag{3.57}$$

Si hacemos $y = x - x_0$, entonces y mide el desplazamiento del objeto desde el punto de equilibrio x_0. En esta nueva variable la ecuación (3.56) se convierte en

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + ky = F_e(t). \tag{3.58}$$

Esta ecuación modela el comportamiento de un resorte vertical del que cuelga un objeto pesado. Las distintas soluciones de esta ecuación, que dependerán de los valores de la masa del objeto, de las constantes k y μ y, obviamente, de las fuerzas externas, nos proporcionan, como todo modelo matemático, una descripción aproximada del comportamiento real del sistema estudiado que, para valores pequeños del desplazamiento y la velocidad iniciales, suele ser bastante adecuada en la mayoría de las situaciones.

El modelo también se aplica en el caso del sistema análogo en que el resorte se desplaza en posición horizontal (véase la figura 3.3). En este caso al enganchar un objeto al muelle este no se mueve de su posición de reposo porque ahora la fuerza de la gravedad no ejerce ninguna influencia en el

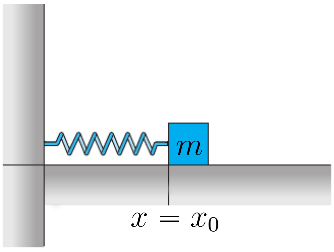

Figura 3.3: Muelle horizontal

movimiento del sistema, por lo que el punto de equilibrio es el punto $x_0 = 0$, y $x = y$. Si el objeto se mueve de su posición de reposo la fuerza resultante F que actúa sobre el sistema en este caso es la suma únicamente de las fuerzas recuperadora, de amortiguamiento y externa:

$$F = F_r + F_a + F_e$$

que procediendo como antes nos conduce a la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = F_e(t). \tag{3.59}$$

3.6.1. Oscilaciones libres no amortiguadas

Cuando la constante de amortiguación μ es nula y no se aplica ninguna fuerza externa, el movimiento resultante se denomina **movimiento libre no amortiguado** o **movimiento armónico simple**. En este caso (3.58) se reduce a la ecuación

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0. \tag{3.60}$$

La ecuación característica de esta ecuación es

$$m\lambda^2 + k = 0$$

que tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$. Denotando $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la solución general de la ecuación (3.60) es

$$y(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t. \tag{3.61}$$

Si y no es la solución trivial, eligiendo ϕ de manera que $0 \leqslant \phi < 2\pi$ y

$$\cos\phi = \frac{c_1}{A} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{c_2}{A},$$

donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \tag{3.62}$$

y sustituyendo en (3.61) se obtiene que

$$y(t) = A\cos\phi\cos\omega t + A\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t,$$

que, haciendo uso de la fórmula del coseno de la diferencia, nos permite escribir y en la forma

$$y(t) = A\cos(\omega t - \phi)\,. \tag{3.63}$$

Dado que la función coseno es periódica de periodo 2π las soluciones de la ecuación (3.60) son periódicas de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3.64}$$

Se denomina **frecuencia** de una función periódica al número de oscilaciones por unidad de tiempo, es decir al número de veces que la función toma un mismo valor en un periodo de tiempo unidad. La frecuencia es el valor inverso del periodo. La **frecuencia angular** es el número de oscilaciones medidas en radianes por unidad de tiempo, es decir es el producto de la frecuencia por 2π. En muchos textos se utiliza habitualmente la frecuencia angular en lugar de la frecuencia. En este caso se suele denominar simplemente frecuencia a la frecuencia angular. La frecuencia suele medirse en ciclos por segundo o hercios y la frecuencia angular en radianes por segundo. En el caso de la ecuación (3.60) sus soluciones tienen

$$\text{frecuencia} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.65}$$

y

$$\text{frecuencia angular} = \frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3.66}$$

La frecuencia de las soluciones, como puede observarse, depende únicamente de las características físicas del sistema, en concreto de la masa m del objeto y de la constante k de elasticidad del resorte.

La constante A se denominan **amplitud** o **amplitud de la oscilación** y, como se ve inmediatamente a partir de (3.63), es el valor máximo que puede alcanzar $|y|$ y, por lo tanto, es el máximo desplazamiento, en uno u otro sentido, que puede alcanzar el resorte desde su punto de equilibrio. Dicho valor máximo se alcanza cuando

$$t = \frac{\phi + n\pi}{w}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

El número ϕ se denomina **ángulo fase** del sistema. La amplitud y el ángulo fase dependen sólo de las condiciones iniciales, posición y velocidad, del movimiento.

La gráfica de la solución (3.63) aparece representada en la figura 3.4.

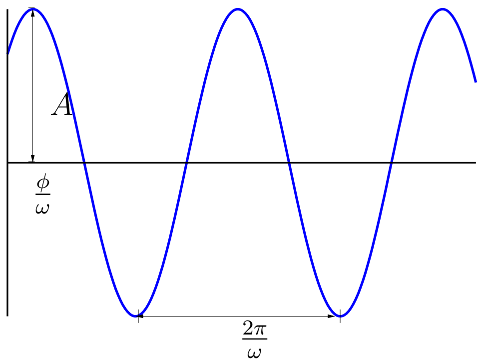

Figura 3.4: Movimiento armónico simple

Ejemplo 3.6.1. Un objeto de 32 N de peso[5] que cuelga de un muelle de acero de 10 cm de longitud produce un alargamiento del muelle de 0,25 cm. Se cambia el objeto que cuelga por otro de 1/2 kg de masa. Queremos determinar el movimiento resultante después de desplazar el objeto 0,25 cm hacia abajo y soltarlo con una velocidad de 1 cm/s también hacia abajo.

En primer lugar vamos a determinar la constante de elasticidad. Según hemos visto en (3.54)

$$k = \frac{mg}{x_0}$$

luego

$$k = \frac{32 \text{ N}}{0{,}25 \text{ cm}} = 128 \text{ N/cm}.$$

Por lo visto más arriba, para determinar el movimiento del muelle con el nuevo objeto de masa $m = \frac{1}{2}$, hemos de resolver la ecuación

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + 128y = 0.$$

La ecuación característica de esta ecuación es, quitando denominadores,

$$\lambda^2 + 256 = 0$$

que tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm\sqrt{256}i = \pm 16i$. En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = c_1 \cos 16t + c_2 \operatorname{sen} 16t.$$

[5]El Newton (N) es la unidad métrica de fuerza. Es la fuerza que hay que aplicar a un 1 kg de masa para obtener una aceleración de 1 m/s^2. Por lo tanto un cuerpo que tiene una masa de 1 kg tiene un peso aproximado de 9,8 N.

Las condiciones iniciales son

$$y(0) = 0{,}25 = \frac{1}{4} \text{ cm}, \quad y'(0) = 1 \text{ cm/s}.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{4} = y(0) = c_1, \quad 1 = y'(0) = 16c_2$$

y la ecuación del movimiento resultante es

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos 16t + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 16t.$$

La amplitud es

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{16}.$$

El ángulo fase ϕ ha de verificar

$$\cos\phi = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

por lo que está en el primer cuadrante y además

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} \approx 0{,}2498 \text{ radianes}.$$

Haciendo uso de la amplitud y el ángulo fase la solución puede ser expresada en la forma

$$y(t) \approx \frac{\sqrt{17}}{16}\cos(16t - 0{,}2498).$$

El periodo de esta función es $\frac{\pi}{8}$ segundos y la frecuencia angular 16 radianes por segundo.

Ejemplo 3.6.2. Supongamos que tenemos un resorte situado en posición horizontal sujeto a un muro en su extremo izquierdo. Un cuerpo de masa $\frac{1}{2}$ kilogramo unido al extremo libre del resorte sufre un estiramiento de 2 metros cuando se le aplica una fuerza de 100 newtons. Queremos determinar la posición del objeto, suponiendo que no hay rozamiento, si inicialmente se encuentra a un metro de la posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 5 m/s en dirección al extremo fijo del resorte.

Para calcular la constante de elasticidad no nos podemos valer de la gravedad porque en este caso no tiene ningún efecto. Sin embargo, sabemos que si aplicamos una fuerza externa $F_e = 100$ N el resorte alcanza el equilibrio con un alargamiento de 2 metros

$$0 = F_e + F_a = 100 - 2k \quad \text{luego} \quad k = 50 \text{ N/m}.$$

La ecuación del movimiento en este caso es, quitando denominadores,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0.$$

Argumentando como antes se llega a que $\omega = \sqrt{100} = 10$ y que la función de posición del resorte es

$$x(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \operatorname{sen} 10t. \tag{3.67}$$

El periodo de la oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

y la frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{5}{\pi} \approx 1{,}59\text{Hz}.$$

Las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -5$ sustituidas en (3.67) y su derivada nos dan que

$$c_1 = x(0) = 1, \quad 10c_2 = x'(0) = -5$$

luego la función de posición del objeto es

$$x(t) = \cos 10t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 10t. \tag{3.68}$$

La amplitud es

$$A = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ \text{m}.$$

El ángulo fase ϕ ha de verificar que

$$\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

lo que nos dice que ϕ se encuentra en el cuarto cuadrante luego

$$\phi = 2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 5{,}8195 \text{ radianes}.$$

La función x en la forma amplitud-fase de manera aproximada queda

$$x(t) \approx \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(10t - 5{,}8195).$$

3.6.2. Oscilaciones libres amortiguadas

Seguimos suponiendo, como en el caso anterior, que no actúa ninguna fuerza exterior pero ahora consideramos que sí existe una fuerza de amortiguamiento. En este caso la ecuación (3.58) queda

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + ky = 0. \tag{3.69}$$

La ecuación característica de esta ecuación es

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0. \tag{3.70}$$

La naturaleza de las raíces de esta ecuación, y por lo tanto la de las soluciones de la ecuación (3.69), depende del signo de $\Delta = \mu^2 - 4km$. Así, el sistema se dice que es

- **Sobreamortiguado** si $\Delta > 0$.
- **Críticamente amortiguado** si $\Delta = 0$.
- **Subamortiguado** si $\Delta < 0$.

Vamos a estudiar cada caso por separado.

Movimiento sobreamortiguado

Si $\Delta > 0$ las soluciones de la ecuación (3.70) son

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m}$$

En consecuencia las soluciones de la ecuación diferencial (3.69) son

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3.71}$$

Como λ_1 y λ_2 son números negativos $y(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. En este caso no hay oscilaciones y la masa desplazada de la posición de equilibrio vuelve hacia la posición de equilibrio. Además la solución, si no es la trivial, pasa a lo sumo una vez por el punto de equilibrio.[6] En general, dependiendo de los valores de las condiciones iniciales, las gráficas de las soluciones no triviales de los sistemas sobreamortiguados son o bien de una de las tres formas que aparecen representadas en la figura 3.5 o bien de la de sus simétricas con respecto al eje t.

[6] Si la solución no es la solución trivial, $y(t)$ sólo puede ser cero si las constantes c_1 y c_2 son no nulas y de signos opuestos. En este caso el único valor para el que y se anula es

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \log\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)$$

que es positivo sólo si $|c_2| > |c_1|$.

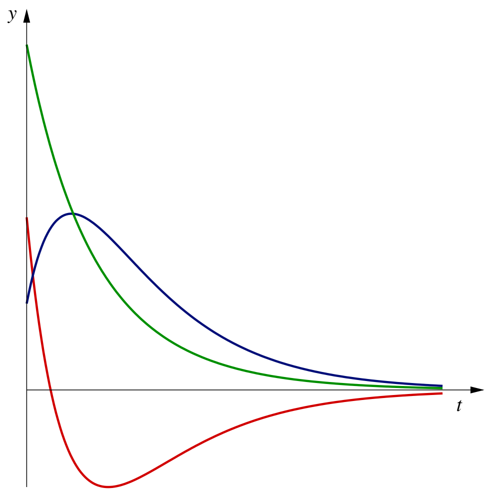

Figura 3.5: Movimiento sobreamortiguado

Movimiento críticamente amortiguado

En este caso la ecuación (3.70) tiene una única raíz doble $\lambda = -\frac{\mu}{2m}$. La solución general de la ecuación diferencial (3.69) es

$$y(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t). \tag{3.72}$$

Como la exponencial es positiva y el polinomio $c_1 + c_2 t$ tiene a lo sumo una raíz, si la solución no es la trivial el objeto pasa por la posición de equilibrio a lo sumo una vez. De hecho esto sólo ocurre si la raíz del polinomio $c_1 + c_2 t$, que es $t = -\frac{c_1}{c_2}$, es positiva, es decir si c_1 y c_2 tiene signos opuestos. También es evidente que no hay oscilaciones y que $y(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Las gráficas de las soluciones son semejantes a las del caso sobreamortiguado.

Movimiento subamortiguado

Este es el más interesante de los tres casos. Ahora las raíces de la ecuación característica (3.70) son de la forma $\lambda = \alpha + \omega i$ con

$$\alpha = \frac{-\mu}{2m} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{\sqrt{4km - \mu^2}}{2m}.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación (3.69) es

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

que, operando como hicimos en 3.6.1, se puede poner en la forma

$$y(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t - \phi)$$

donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

y ϕ es tal que

$$\cos\phi = \frac{c_1}{A}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{c_2}{A} \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi.$$

Aunque el movimiento en realidad no es periódico, las soluciones sí tienen carácter oscilatorio. Podríamos decir que son oscilaciones amortiguadas ya que la amplitud de las oscilaciones no es constante sino que va decreciendo con el tiempo. Las gráficas de las soluciones están comprendidas entre las curvas $y(t) = -Ae^{\alpha t}$ e $y(t) = Ae^{\alpha t}$ y las toca de forma regular en los puntos de la forma

$$t = \frac{\phi + n\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Podemos entonces definir el **seudoperiodo** de la oscilación como

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{2m}{\sqrt{2km - \mu^2}}.$$

que es el intervalo de tiempo entre dos máximos o dos mínimos sucesivos. Estas soluciones pasan regularmente por el punto de equilibrio dos veces en cada seudoperiodo una en cada sentido. Por analogía con el caso armónico a

$$\omega = \frac{\sqrt{4km - \mu^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu}{4m^2}}$$

se le denomina **seudofrecuencia** de la oscilación. Obsérvese que en este caso la seudofrecuencia es menor que la frecuencia que se tendría si no existiese la fuerza de amortiguación, que sería $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, y por lo tanto el seudoperiodo T_a es mayor que el periodo T de la oscilación sin amortiguación. Esto nos dice que la acción de la fuerza de amortiguamiento produce dos efectos, por un lado amortigua la amplitud de la oscilación y por otro ralentiza el movimiento disminuyendo su frecuencia. En la figura 3.6 aparece representada la gráfica de una solución típica de movimiento subamortiguado.

Ejemplo 3.6.3. Consideremos un objeto de masa 0,5 kg suspendido de un muelle con constante de elasticidad $k = 2$ N/cm. Supongamos que la constante de amortiguamiento es menor que 2 N·s/cm. Queremos estudiar el movimiento del objeto después de desplazarlo 1 cm hacia abajo y soltarlo.

La ecuación diferencial que describe este movimiento es

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \tag{3.73}$$

y las condiciones iniciales son $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. La ecuación característica de (3.73) es

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + 4 = 0$$

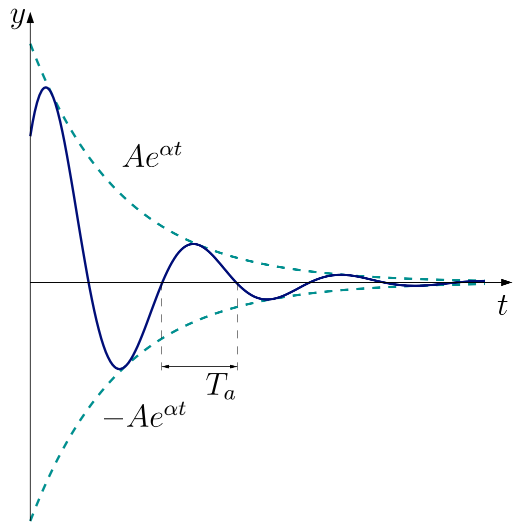

Figura 3.6: Movimiento subamortiguado

que tiene dos raíces complejas $\lambda = -\mu \pm \sqrt{4-\mu^2}\, i$. En consecuencia la solución general de la ecuación (3.73) es

$$y(t) = e^{-\mu t}\Big[c_1 \cos\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big) + c_2 \operatorname{sen}\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big)\Big]. \tag{3.74}$$

Haciendo uso de las condiciones iniciales se obtiene que

$$1 = y(0) = c_1 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = -\mu c_1 + \sqrt{4-\mu^2}\, c_2$$

de lo que se deduce que

$$c_1 = 1 \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{\mu}{\sqrt{4-\mu^2}}.$$

Sustituyendo estos valores en (3.74) se obtiene que

$$y(t) = e^{-\mu t}\Big[\cos\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big) + \frac{\mu}{\sqrt{4-\mu^2}} \operatorname{sen}\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big)\Big]. \tag{3.75}$$

La seudofrecuencia de y es

$$\omega = \sqrt{4-\mu^2}$$

y el seudoperiodo es

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{4-\mu^2}}.$$

Haciendo

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\sqrt{4-\mu^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4-\mu^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-\mu^2}}$$

y eligiendo ϕ tal que

$$\cos\phi = \frac{1}{A}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{\mu}{A\sqrt{4-\mu^2}} \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

la función y se puede poner en la forma

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{4-\mu^2}} e^{-\mu t} \cos(\sqrt{4-\mu^2}\, t - \phi). \tag{3.76}$$

En la figura 3.7 aparece representada la gráfica de la función (3.76) para

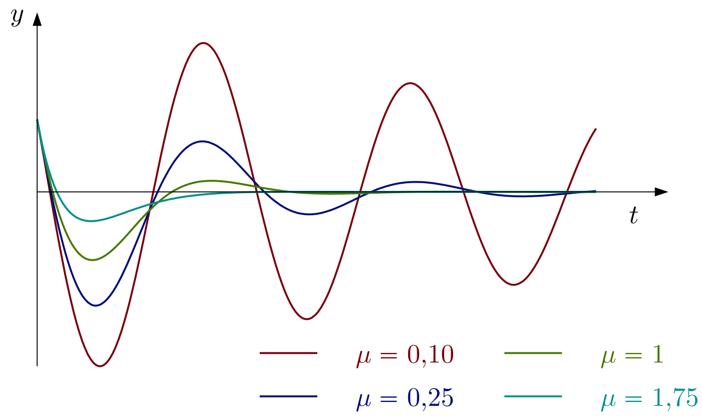

Figura 3.7: Gráfica de la función (3.76) para diversos valores de μ

$\mu = 0{,}1$, $0{,}25$, 1 y $1{,}75$. Como puede observarse según va aumentando el valor de μ la amplitud va decreciendo y el seudoperiodo creciendo.

3.6.3. Oscilaciones forzadas no amortiguadas

En esta sección y en la siguiente vamos a estudiar sistemas sobre los que actúa una fuerza externa, F_e, dependiente del tiempo. En nuestro estudio únicamente vamos a considerar fuerzas externas de la forma

$$F_e(t) = F_0 \cos\omega t \tag{3.77}$$

donde F_0 es una constante no nula.

Vamos a comenzar suponiendo que no hay fuerza de amortiguamiento. En este caso la ecuación (3.58) adopta la forma

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = F_0 \cos\omega t. \tag{3.78}$$

Sabemos que la solución general de la ecuación (3.78) es la superposición (la suma) de una solución particular y_p de la ecuación y la solución general

y_h de la ecuación homogénea asociada. Esta última es la ecuación del movimiento libre no amortiguado que hemos visto en 3.6.1 que tiene solución general

$$y_h(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right). \tag{3.79}$$

Para hallar y_p vamos a utilizar el método de los coeficientes indeterminados. Para ello hemos de considerar dos casos según que la función F_e sea o no solución de la ecuación homogénea asociada. Esto depende de que la frecuencia angular de F_e, ω, coincida o no con la frecuencia correspondiente al movimiento libre del sistema, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A esta última se le denomina **frecuencia (angular) natural** del sistema.

Frecuencia de la fuerza de entrada distinta de la frecuencia natural

En este caso vamos a buscar una solución particular de la ecuación (3.60) de la forma

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t. \tag{3.80}$$

Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial se tiene que

$$-m\omega^2(a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t) + k(a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t) = F_0 \cos \omega t$$

que igualando coeficientes da

$$\begin{aligned} -ma\omega^2 + ka =& F_0 \\ -mb\omega^2 + kb =& 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$a = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \quad \text{y} \quad b = 0.$$

En consecuencia la solución particular buscada es

$$y_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t. \tag{3.81}$$

La solución general de la ecuación (3.78) es

$$y(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t + c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \tag{3.82}$$

donde las constantes c_1 y c_2 están determinadas por los valores iniciales $y(0)$ e $y'(0)$. Esta solución es la superposición de dos oscilaciones, una que es la correspondiente al movimiento libre, que tiene como frecuencia angular la frecuencia natural del sistema, y la otra con la misma frecuencia que la fuerza externa.

Ejemplo 3.6.4. Consideremos un resorte con coeficiente de elasticidad $k = 9$ del que cuelga un cuerpo de masa $m = 1$. Queremos determinar la respuesta (la solución) del correspondiente sistema si está sometido a una fuerza exterior $F_e(t) = 80 \cos 5t$ supuesto que $y(0) = y'(0) = 0$.

La ecuación del movimiento en este caso es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 80 \cos 5t. \tag{3.83}$$

La frecuencia natural es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3$$

y la frecuencia de la fuerza externa es $\omega = 5$. Como ambas frecuencias son distintas estamos en las condiciones de la discusión precedente. Repitiendo los razonamientos anteriores se llega a que

$$y_p(t) = \frac{80}{9 - 25} \cos 5t = -5 \cos 5t.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación (3.83) es

$$y(t) = -5 \cos 5t + c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t. \tag{3.84}$$

Las condiciones iniciales implican que

$$0 = y(0) = c_1 - 5 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = 3c_2$$

luego $c_1 = 5$ y $c_2 = 0$. En consecuencia la solución de nuestro problema es

$$y(t) = 5 \cos 3t - 5 \cos 5t. \tag{3.85}$$

En este caso la solución es periódica de periodo 2π. En la figura 3.8 aparece

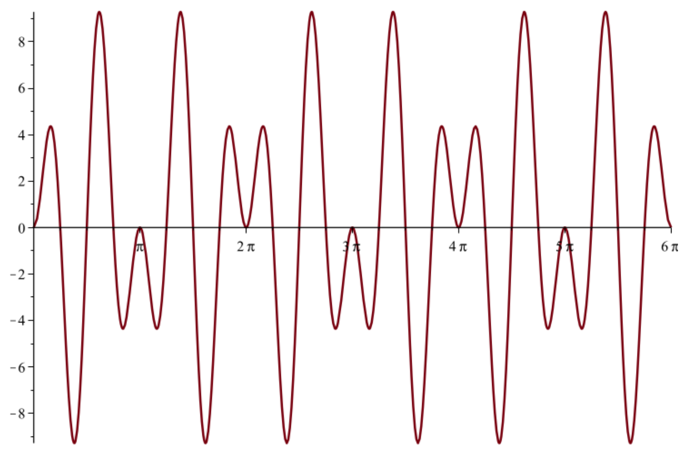

Figura 3.8: Gráfica de la función (3.85)

representada la gráfica de la función (3.85).

Vamos a estudiar ahora un fenómeno interesante que aparece en algunas situaciones cuando los valores de las frecuencias son próximos. Supongamos que $y(0) = y'(0) = 0$. Sustituyendo en (3.82) se tiene que

$$0 = y(0) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + c_1 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = c_2\omega_0$$

luego

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{y} \quad c_2 = 0$$

por lo que

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t - \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega_0 t \\ = & \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \end{aligned} \tag{3.86}$$

Haciendo uso de la formula de la diferencia de cosenos podemos expresar la función anterior como

$$y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t. \tag{3.87}$$

Si los valores de las frecuencias son próximos $\omega + w_0$ es muy grande en comparación con $|\omega_0 - \omega|$ por lo que los valores de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ cambian muy rápidamente mientras que por el contrario los valores de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$ lo hacen muy despacio. Podemos interpretar entonces la ecuación (3.87) como una oscilación con frecuencia angular $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$,

$$y(t) = A(t) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\, t \tag{3.88}$$

pero con una amplitud variable lenta,

$$A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t.$$

Este fenómeno se conoce con el nombre de **batimiento**.[7]

[7] En Física se define el batimiento como la variación periódica en amplitud debida a la superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

Debido a que la intensidad del sonido es proporcional al cuadrado de la amplitud, el sonido es más fuerte siempre que la función de amplitud es o bien un máximo o un mínimo. Cuando hay batimiento esto se produce dos veces en cada periodo de la onda envolvente o, lo que es lo mismo, con una frecuencia igual a la diferencia de las frecuencias de las dos ondas. Si esta frecuencia es inferior a 15 o 20 ciclos por segundo el oído es capaz de distinguir estas fluctuaciones de volumen, para frecuencias superiores las fluctuaciones son demasiado rápidas para distinguirlas.

Este fenómeno es a menudo utilizado para comparar una frecuencia desconocida con otra conocida. Por ejemplo, para afinar un piano con la ayuda de un diapasón, el afinador presiona una tecla y simultáneamente hace sonar el diapasón mientras ajusta la tensión de la cuerda del piano para modificar su frecuencia hasta que las fluctuaciones sonoras producidas por los batimientos aparecen muy separadas lo que indica que la diferencia de las frecuencias de los sonidos es muy pequeña.

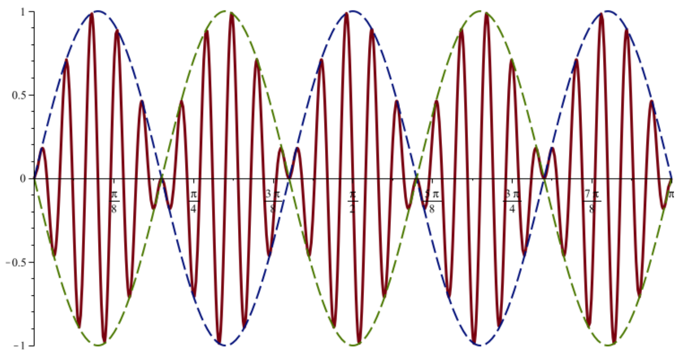

Figura 3.9: El fenómeno de batimiento. Las gráficas discontinuas corresponden a la amplitud y su opuesta

Frecuencia de la fuerza exterior igual a la frecuencia natural

Si $\omega = \omega_0$ la fuerza externa es solución de la ecuación homogénea asociada. Para aplicar el método de los coeficientes indeterminados hay que buscar soluciones de la forma

$$y_p(t) = t(a\cos\omega t + b\,\mathrm{sen}\,\omega t). \tag{3.89}$$

El término entre paréntesis es una función y_1 que es solución de la ecuación homogénea asociada. Teniendo esto en cuenta, sustituyendo en la ecuación (3.78) se tiene que

$$m(2y_1' + ty'') + kty_1 = 2my_1' = F_0\cos\omega t$$

o lo que es lo mismo

$$2m(-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t) = F_0\cos\omega t$$

que igualando los coeficientes de los términos en coseno y en seno da

$$2mb\omega = F_0 \quad \text{y} \quad -2ma\omega = 0$$

de donde se concluye que

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = \frac{F_0}{2m\omega}.$$

En consecuencia

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega}\,t\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{3.90}$$

y la solución general de la ecuación (3.78) es

$$y(t) = \frac{F_0}{2m\omega}\,t\,\mathrm{sen}\,\omega t + c_1\cos\omega t + c_2\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{3.91}$$

La solución particular y_p es particularmente interesante porque ilustra el fenómeno conocido como **resonancia**. En este caso la amplitud variable de la oscilación

$$\frac{F_0}{2m\omega}\, t \operatorname{sen} \omega t$$

crece de manera proporcional al tiempo, lo que hace que la solución sea una oscilación no acotada.[8] La gráfica de la función (3.90) aparece representada en la figura 3.10 junto con las rectas

$$y = \pm \frac{F_0}{2m\omega}\, t$$

que aparecen representadas con trazo discontinuo.

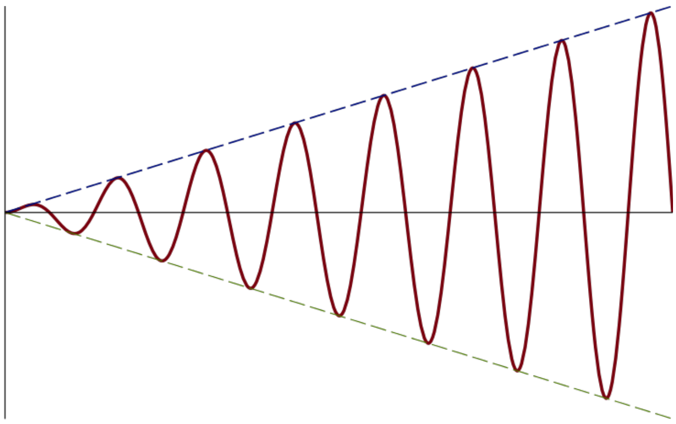

Figura 3.10: Resonancia no amortiguada

[8]El fenómeno de la resonancia aparece en situaciones muy variadas teniendo en ocasiones consecuencias desastrosas y siendo utilizado con provecho en otras.

Un ejemplo espectacular de los efectos de la resonancia se tiene cuando una cantante rompe una copa de cristal con su voz amplificada. Si la cantante emite con potencia una nota con una frecuencia exactamente igual a una de las frecuencias naturales de vibración de la copa, se pueden crear oscilaciones de gran amplitud que pueden llegar a romper el cristal.

Los puentes proporcionan numerosos ejemplos de los efectos de la resonancia. Un ejemplo clásico es el derrumbamiento en el año 1831 del puente de Broughton en Inglaterra tras el paso de un grupo de 60 soldados marcando el paso con una frecuencia coincidente con una de las frecuencias naturales del puente. Otro caso análogo sucedió en el Pont de la Basse-Chaîne en Angers (Francia) en 1850 causando la muerte de más de 200 soldados. Por este motivo se ordena que las formaciones militares rompan el paso antes de atravesar un puente (véase la figura 3.11).

La resonancia se puede emplear, por otro lado, para amplificar señales débiles. En los antiguos receptores de radio este procedimiento era empleado para amplificar la señal de la emisora que se deseaba oír, poniendo en resonancia la frecuencia del aparato con la de la señal de dicha emisora.

Figura 3.11: Aviso a la entrada del Albert Bridge en Londres

Ejemplo 3.6.5. Supongamos que un objeto de masa 1 kg cuelga de un muelle de coeficiente de elasticidad 1 N/m y que se somete el sistema a una fuerza externa $F_e(t) = \cos t$ N. Queremos determinar la respuesta del sistema si en el instante inicial está parado y en equilibrio.

La ecuación del sistema es

$$y'' + y = \cos t \tag{3.92}$$

y las condiciones iniciales son $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Como la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

que tiene dos soluciones imaginarias puras $\lambda = \pm i$, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Si, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos una solución particular de la ecuación (3.92) de la forma

$$y_p(t) = t(a \cos t + b \operatorname{sen} t),$$

sustituyendo en (3.92) se obtiene que

$$2(-a \operatorname{sen} t + b \cos t) - t(a \cos t + b \operatorname{sen} t) + t(a \cos t + b \operatorname{sen} t) = \cos t$$

o

$$2(-a \operatorname{sen} t + b \cos t) = \cos t$$

que igualando los coeficientes de los términos en senos y cosenos da $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$. En consecuencia

$$y_p(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$$

y la solución general de (3.92) es

$$y(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Tomando en consideración las condiciones iniciales se llega a que

$$0 = y(0) = c_1 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = c_2.$$

Así que en este caso la solución del problema de valor inicial coincide con la solución particular que hemos obtenido.

3.6.4. Oscilaciones forzadas amortiguadas

En los sistemas físicos reales siempre hay una fuerza de amortiguamiento aunque sea muy pequeña. En este caso la ecuación del movimiento es de la forma

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \tag{3.93}$$

con $\mu > 0$. La solución general de esta ecuación es de la forma

$$y = y_p + y_h$$

donde y_p es una solución particular de (3.93) e y_h es una solución de la ecuación homogénea asociada. Esta última ecuación corresponde a un movimiento libre no amortiguado que, según vimos en 3.6.2, tiene diferente solución según el movimiento sea sobreamortiguado, subamortiguado o críticamente amortiguado. En cualquiera de los tres casos vimos que las correspondientes soluciones tienden a 0 cuando t tendía a infinito. Esto nos dice que la componente y_h de la solución es una componente transitoria. Como las condiciones iniciales determinan y_h, se concluye de lo anterior que con el tiempo el efecto de las condiciones iniciales va desapareciendo y la respuesta del sistema está determinada casi completamente por la fuerza externa aplicada.

Como $\mu > 0$ la fuerza externa no es solución de la ecuación homogénea asociada por lo que, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se sabe que la ecuación (3.93) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t.$$

Sustituyendo esta función en la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} - m\omega^2(a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t) + \mu\omega(-a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t) \\ + k(a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t) = F_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

e igualando los términos en coseno y en seno se llega a que

$$\begin{aligned}(k-m\omega^2)a+\mu\omega b =&F_0\\ -\mu\omega a+(k-m\omega^2)b =&0\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$a=\frac{(k-m\omega^2)F_0}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\quad \text{y}\quad b=\frac{\mu\omega F_0}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}.$$

Por lo tanto, una solución particular de la ecuación (3.93) es

$$y_p(t)=\frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}\left((k-m\omega^2)\cos\omega t+\mu\omega\operatorname{sen}\omega t\right). \tag{3.94}$$

Poniendo

$$A(\omega)=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}} \tag{3.95}$$

y eligiendo ϕ de manera que, $0\leqslant\phi<2\pi$ y

$$\cos\phi=\frac{k-m\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}},\quad \operatorname{sen}\phi=\frac{\mu\omega}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}} \tag{3.96}$$

la función y_p se puede escribir también en la forma

$$y_p(t)=A(\omega)\cos(\omega t-\phi) \tag{3.97}$$

o

$$y_p(t)=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}}\cos(\omega t-\phi). \tag{3.98}$$

La amplitud de esta solución,

$$A(\omega)=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\mu\omega)^2}}, \tag{3.99}$$

a diferencia del caso no amortiguado, es una función acotada de ω. El valor máximo de $A(\omega)$ se alcanza cuando el valor de

$$m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\mu\omega)^2 \tag{3.100}$$

es mínimo. Desarrollando y completando cuadrados se verifica que

$$m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\mu\omega)^2=\left(m\omega^2+\frac{\mu^2-2m^2\omega_0^2}{2m}\right)^2+m^2\omega_0^4-\left(\frac{\mu^2-2m^2\omega_0^2}{2m}\right)^2$$

de donde se deduce que el valor mínimo de (3.100) se alcanza cuando

$$\left(m\omega^2+\frac{\mu^2-2m^2\omega_0^2}{2m}\right)^2$$

es mínimo, lo que ocurre cuando $\omega = 0$ si $\mu^2 - 2m^2\omega_0^2 \geqslant 0$ o cuando

$$\omega = \sqrt{\frac{2m^2\omega_0^2 - \mu^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{2m^2}} \tag{3.101}$$

si $\mu^2 - 2m^2\omega_0^2 < 0$. Esto nos dice que cuando $\mu \geqslant 2m\omega_0 = 2\sqrt{2km}$, es decir cuando el sistema esta sobreamortiguado o críticamente amortiguado, la función A alcanza su máximo cuando $\omega = 0$ y luego decrece. En cambio cuando $\mu < 2m\omega_0 = \sqrt{2km}$, es decir cuando el sistema está subamortiguado, la amplitud alcanza su máximo para el valor (3.101) y luego tiende a 0 cuando ω tiende a infinito. Cuando el sistema está subamortiguado y la frecuencia de la fuerza externa es (3.101), que es la que proporciona la respuesta de amplitud máxima, se dice que el sistema está en **resonancia práctica** y al valor (3.101) de ω se le denomina **frecuencia de resonancia o resonante**.

Ejemplo 3.6.6. Un objeto de masa 1 g pende de un resorte que tiene una constante de elasticidad de 50 g/s^2 y un coeficiente de amortiguamiento de 2 g/s. El objeto se desplaza hacia abajo $\frac{23}{26}$ cm y se suelta con una velocidad de $28 + \frac{2}{13}$ cm/s en la misma dirección. Sobre el objeto actúa una fuerza de $41\cos 2t$ dinas.[9] Queremos determinar el movimiento resultante.

La ecuación diferencial que rige este movimiento es

$$y'' + 2y' + 50y = 41\cos 2t \tag{3.102}$$

y las condiciones iniciales son

$$y(0) = \frac{23}{26}, \qquad y'(0) = 28 + \frac{2}{13}. \tag{3.103}$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 50 = 0$$

que tiene dos soluciones

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{50-1}i = -1 \pm 7i.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(t) = e^{-t}(c_1\cos 7t + c_2 \operatorname{sen} 7t). \tag{3.104}$$

Para obtener una solución particular de la ecuación (3.102) aplicamos el método de variación de las constantes que nos dice que la ecuación tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t) = a\cos 2t + b \operatorname{sen} 2t.$$

[9] Una dina es una unidad de fuerza que equivale a la fuerza necesaria para mover la masa de un gramo a razón de un centímetro por segundo cada segundo.

Sustituyendo en la ecuación se obtiene que

$$\begin{aligned}&-4(a\cos 2t + b\,\mathrm{sen}\,2t) + 4(-a\,\mathrm{sen}\,2t + b\cos 2t)+\\ &\qquad\qquad + 50(a\cos 2t + b\,\mathrm{sen}\,2t) = 41\cos 2t.\end{aligned}$$

e igualando los coeficientes de los términos en coseno y seno

$$\begin{aligned}46a+\ 4b &= 41\\ -4a+46b &= 0\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$a = \frac{41\times 46}{46^2+16} = \frac{23}{26}, \qquad b = \frac{164}{46^2+16} = \frac{1}{13}$$

y, por tanto,

$$y_p(t) = \frac{23}{26}\cos 2t + \frac{1}{13}\,\mathrm{sen}\,2t.$$

En consecuencia la solución general de (3.102) es

$$y(t) = \frac{23}{26}\cos 2t + \frac{1}{13}\,\mathrm{sen}\,2t + e^{-t}(c_1\cos 7t + c_2\,\mathrm{sen}\,7t). \tag{3.105}$$

Haciendo uso de la condiciones iniciales (3.103) se llega a que

$$\begin{aligned}\frac{23}{26} &= y(0) = \frac{23}{26} + c_1\\ 28 + \frac{2}{13} &= y'(0) = \frac{2}{13} - c_1 + 7c_2\end{aligned}$$

de donde se obtienen los valores de las constantes $c_1 = 0$ y $c_2 = 4$, que sustituidos en (3.105) nos dan que

$$y(t) = \frac{23}{26}\cos 2t + \frac{1}{13}\,\mathrm{sen}\,2t + 4e^{-t}\,\mathrm{sen}\,7t. \tag{3.106}$$

La amplitud de la solución de la parte estable es

$$A = \sqrt{\left(\frac{23}{26}\right)^2 + \left(\frac{1}{13}\right)^2} = \frac{23^2+4}{26^2} = \sqrt{\frac{51}{56}}$$

y ángulo fase ϕ tal que $0 < \phi < \pi$ y

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{2}{23}.$$

Haciendo uso de estos valores podemos poner la función y en la forma

$$y(t) = \sqrt{\frac{51}{56}}\cos(2t-\phi) + 4e^{-t}\,\mathrm{sen}\,7t. \tag{3.107}$$

Obsérvese que la parte estable es periódica con el mismo periodo que la fuerza externa.

El sistema es subamortiguado y la frecuencia de la fuerza externa, 2, es bastante menor que la frecuencia de resonancia del sistema que es

$$\sqrt{50-2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928.$$

3.7. Circuitos eléctricos

Todo movimiento de carga eléctrica de una región a otra se denomina corriente eléctrica. Cuando ese desplazamiento tiene lugar a lo largo de una trayectoria cerrada dicha trayectoria recibe el nombre de circuito eléctrico. Los circuitos eléctricos están formados por conductores conectados entre sí por los que circula la corriente eléctrica. Para que esta fluya es necesario que exista una fuerza electromotriz. Esta es la cantidad de energía por unidad de carga que se suministra al sistema.

En cada punto de un circuito eléctrico hay dos magnitudes fundamentales en el estudio de las corrientes eléctricas: el voltaje (o potencial) y la intensidad (o flujo de carga). La unidad de medida del potencial es el voltio y la de intensidad el amperio. Una **rama** de un circuito es una parte de este con dos terminales a las que se pueden conectar otras ramas. Un **nodo** es un punto donde se unen dos o más ramas y un **bucle** es una trayectoria cerrada formada por diversas ramas conectadas.

En la exposición que sigue únicamente vamos a considerar circuitos eléctricos constituidos por dispositivos de los siguientes cuatro tipos básicos.

Fuente de fuerza electromotriz. Es un dispositivo que provee de fuerza electromotriz al circuito. Convierte energía mecánica, química, térmica etc. en energía potencial eléctrica y la transfiere al circuito al que esta conectado el dispositivo. Algunos ejemplos de fuentes de fuerza electromotriz son las baterías, las dinamos, los generadores eléctricos, los acumuladores, las placas solares etc. Se suele denotar con la letra $\mathcal{E}$ y su unidad es la misma que la del potencial, el voltio.

Resistencia. También se emplea el término **resistor**. Es un elemento que se opone a la corriente eléctrica produciendo como consecuencia una caída de potencial. La razón entre la diferencia de potencial V_R y la intensidad de la corriente i en un conductor es una función del tiempo, R, que se denomina **resistencia**. En muchos materiales, en especial metálicos, a una temperatura dada la resistencia es constante por lo que la diferencia de potencial es directamente proporcional a la intensidad de la corriente y satisfacen lo que se conoce como **Ley de Ohm**:

$$V_R = iR \tag{3.108}$$

El valor de la función R se mide en ohmios. Un ohmio es la resistencia que produce una caída de potencial de un voltio si la corriente tiene una intensidad de un amperio.

Condensador. Los condensadores son dispositivos que se emplean para almacenar energía. Están formados por dos conductores separados por un aislante. Los dos conductores tienen carga de igual magnitud y signo contrario de manera que la carga neta en el condensador en su conjunto permanece igual a 0. La carga Q del conductor de carga positiva se dice que es la carga del condensador o la carga que está almacenada en el condensador.

El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud Q de carga del conductor. Por lo tanto la diferencia de potencial V_C entre los conductores también es proporcional a Q,

$$V_C = \frac{1}{C}\,Q. \tag{3.109}$$

A la razón C entre la carga y la diferencia de potencial se le denomina **capacidad eléctrica**, o **capacitancia**, del condensador. La unidad de carga eléctrica es el culombio y la de capacidad es el faradio que es la capacidad de un conductor que con una carga de un culombio adquiere el potencial de un voltio.

Teniendo en cuenta que la intensidad es la tasa de variación de la carga con respecto al tiempo

$$i = \frac{dQ}{dt}, \tag{3.110}$$

si la capacidad es constante, derivando en (3.109), y utilizando (3.110), se obtiene la ecuación

$$i = C\,\frac{dV_C}{dt}. \tag{3.111}$$

Inductor. También se denomina bobina de autoinducción o simplemente autoinducción. Cuando en un circuito eléctrico hay presente una corriente, se establece un campo magnético que crea un flujo magnético a través del mismo circuito que cambia cuando la corriente cambia. Así, cualquier circuito que conduzca una corriente variable tiene una fuerza electromotriz inducida por él mismo por la variación en su propio campo magnético. Esta clase de fuerza electromotriz se denomina **autoinducida**. Una fuerza electromotriz autoinducida siempre se opone al cambio en la corriente que la causó. Como consecuencia de la **ley de Faraday** se deduce que una fuerza electromotriz autoinducida $\mathcal{E}_L$ siempre es proporcional a la tasa de cambio de la intensidad de la fuente con respecto del tiempo

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt} \tag{3.112}$$

donde L es una constante de proporcionalidad, denominada **autoinductancia**, o simplemente **inductancia**, del circuito. La unidad de inductancia es el henrio que es la la inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de un voltio cuando la corriente eléctrica varía uniformemente a razón de un amperio por segundo

Un **inductor** es un elemento de un circuito con una gran autoinductancia. Su finalidad es oponerse a cualquier variación en la corriente a través del circuito, produciendo una caída de voltaje V_L dada por

$$V_L = L\frac{di}{dt}. \tag{3.113}$$

Las leyes que rigen el comportamiento de la corriente eléctrica en un circuito se conocen con el nombre de **leyes de Kirchhoff**:

I) La suma de las intensidades que entran en un nodo en un instante determinado es cero.

II) La suma de las fuerzas electromotrices alrededor de un bucle en un instante determinado es igual a la suma de las caídas de voltaje.

Para aplicar estas leyes adecuadamente es necesario asignar un sentido de recorrido positivo. Con esta asignación las intensidades de corriente que entran en el nodo se consideran que tienen signo opuesto al de las corrientes que salen del nodo. Ya que las cargas se mueven del extremo de mayor potencial al de menor, si se recorre una resistencia, un condensador o un inductor en la dirección de la corriente las caídas de voltaje se suman, si se recorren en sentido contrario se restan. Lo contrario se verifica para una fuente de fuerza electromotriz porque en este caso se produce una ganancia de voltaje, es decir una caída de voltaje negativa.

Vamos a examinar un circuito con los elementos indicados anteriormente instalados en serie (véase la figura 3.12). Supondremos que la resistencia del

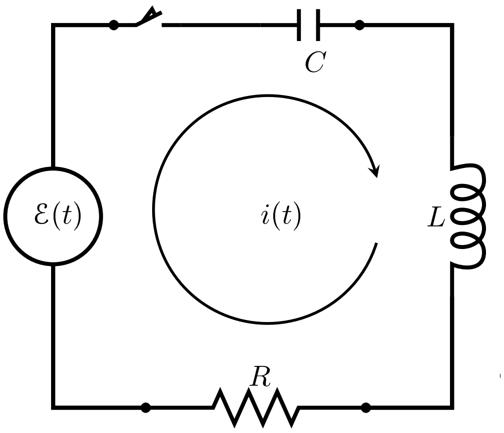

Figura 3.12: Circuito eléctrico

resistor es de R ohmios, que el inductor tiene una inductancia de L henrios, el condensador una capacidad de C faradios y que la fuente de fuerza electromotriz proporciona, en el instante t, un potencial de $\mathcal{E}(t)$ voltios. Supondremos además que el circuito posee un interruptor que no deja pasar la corriente cuando está abierto.

Al cerrar el interruptor la corriente recorre el circuito con una intensidad que, de acuerdo con la ley de Kirchhoff de las intensidades, es la misma en las cuatro ramas del circuito (en la figura 3.12 los nodos del circuito están indicados con un punto). Denotaremos por $i(t)$ a dicha intensidad, medida en amperios, en el instante t. Esta corriente produce una carga de $Q(t)$ culombios en el condensador. La ley de Kirchhoff de los potenciales nos dice que

$$\mathcal{E}(t) = V_C + V_L + V_R$$

que aplicando las ecuaciones (3.109), (3.113) y (3.108) nos da la ecuación

$$\mathcal{E}(t) = \frac{Q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri.$$

que satisfacen la intensidad y la carga del circuito. Sustituyendo (3.110) en esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden en Q:

$$L\,\frac{d^2Q}{dt^2} + R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}\,Q = \mathcal{E}(t). \tag{3.114}$$

Para obtener la intensidad es suficiente aplicar (3.110). Alternativamente, derivando la ecuación (3.114) y reemplazando Q' por i obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$L\,\frac{d^2i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \mathcal{E}'(t) \tag{3.115}$$

que nos permite obtener directamente la intensidad de la corriente.

Las ecuaciones anteriores, conocidas las correspondientes condiciones iniciales, nos permiten determinar completamente la carga y la intensidad en el circuito. Habitualmente, sin embargo, sólo se suelen conocer las condiciones en el instante $t = 0$ de i, y Q, por lo que si únicamente estamos interesados en conocer la intensidad y queremos aplicar la ecuación (3.115) hemos de calcular $i'(0)$. Teniendo en cuenta que $Q' = i$, esto se puede hacer particularizando la ecuación (3.114) en $t = 0$, lo que nos lleva a la ecuación

$$L\,\frac{di}{dt}(0) + R\,i(0) + \frac{1}{C}\,Q(0) = \mathcal{E}(0) \tag{3.116}$$

de donde se puede obtener $i'(0)$.

Ejemplo 3.7.1. Consideremos un circuito como el de la figura 3.12 alimentado por una batería de 1,5 voltios, con un resistor con una resistencia de 2 ohmios, un condensador de 2 faradios de capacidad y un inductor con una inductancia de 1 henrio. Supongamos que inicialmente la carga en el condensador es de 2 culombios y que la intensidad de la corriente en la resistencia es de 4 amperios.

En este caso la ecuación (3.115) adopta la forma

$$i'' + 2i' + \frac{1}{2}i = 0. \tag{3.117}$$

La ecuación característica de la ecuación es

$$\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

que tiene dos raíces

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación (3.117) es

$$i(t) = e^{-t}\Big(c_1 e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\Big). \tag{3.118}$$

Como $i(0) = 4$ y $Q(0) = 2$, sustituyendo en (3.116) se obtiene que

$$i'(0) + 2i(0) + \frac{1}{2}Q(0) = i'(0) + 9 = 1{,}5$$

luego $i'(0) = -7{,}5$. Reemplazando los valores de $i(0)$ e $i'(0)$ en la expresión (3.118) particularizada en $t = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4 \\ \Big(-1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\Big)c_1 + \Big(-1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\Big)c_2 &= -7{,}5 \end{aligned}$$

luego

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -7{,}5 & -1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 + \sqrt{\frac{1}{2}} & -1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}} = \frac{-4 - 2\sqrt{2} + 7{,}5}{-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 3{,}5}{\sqrt{2}}$$

y

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 + \sqrt{\frac{1}{2}} & -7{,}5 \end{vmatrix}}{-\sqrt{2}} = \frac{7{,}5 - 4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3{,}5 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

En consecuencia la intensidad de la corriente en el circuito es

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\Big((2\sqrt{2} - 3{,}5)e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} + ((2\sqrt{2} + 3{,}5)e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\Big).$$

Obsérvese que cuando t tiende a infinito la intensidad $i(t)$ tiende a 0, como era de esperar.

La carga Q se puede obtener integrando i:

$$Q(t) = \int_0^t i(s)\,ds + Q(0) = e^{-t}\Big(\frac{2\sqrt{2} - 3{,}5}{1 - \sqrt{2}}e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} - \frac{2\sqrt{2} + 3{,}5}{1 + \sqrt{2}}e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\Big) + 2.$$

En el ejemplo anterior el circuito tenía como fuente de fuerza electromotriz una batería que proporcionaba una corriente constante. Vamos a analizar ahora otro tipo de circuitos, que aparecen frecuentemente en la práctica,[10] en los que la fuente de alimentación proporciona una fuerza electromotriz no constante que varía de forma periódica. Estos son los denominados circuitos de corriente alterna.

Se denomina fuente de corriente alterna a cualquier dispositivo que suministre un voltaje o una corriente que varíe en forma sinusoidal. El voltaje $\mathcal{E}$ suministrado por una fuente de corriente alterna viene dada por una función de la forma

$$\mathcal{E}(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t. \tag{3.119}$$

donde ω es un número, que supondremos positivo.[11] El valor $|E_0|$ que aparece en la expresión anterior se denomina amplitud de voltaje y es el valor máximo que puede alcanzar el voltaje aplicado. En este caso la ecuación diferencial (3.116) toma la forma

$$L\,\frac{d^2i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \omega E_0 \cos \omega t. \tag{3.120}$$

La solución de esta ecuación es la suma de una solución particular, i_p, de la ecuación y una solución, i_h, de la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica de esta última es

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

que tiene raíces

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$$

si $R^2 - \dfrac{4L}{C} \geqslant 0$, y

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}i}{2L}$$

[10] En la actualidad la mayoría de los sistemas de distribución de energía para uso doméstico e industrial emplean corriente alterna. Cualquier aparato que se enchufe a una toma de pared utiliza por lo tanto corriente alterna. Pero también muchos dispositivos alimentados con baterías, como radios y teléfonos móviles, emplean la corriente continua que suministran sus baterías para crear o amplificar corrientes alternas.

[11] En Europa la corriente que suministran las compañías eléctricas tiene una frecuencia de 50 hercios mientras que en Estados Unidos y Canadá emplean una frecuencia de 60 hercios.

en otro caso. En consecuencia

$$i_h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1 e^{\frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t}\right) & \text{si } R^2 - \frac{4L}{C} > 0 \\ e^{-\frac{R}{2L}t}(c_1 + c_2 t) & \text{si } R^2 = \frac{4L}{C} \\ e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}t + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L}t\right) & \text{si } R^2 - \frac{4L}{C} < 0 \end{cases} \tag{3.121}$$

Como L, R y C suponemos que son números positivos, en cualquiera de los tres casos $i_h(t)$ tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$.

Podemos utilizar el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de la ecuación (3.120) de la forma

$$i_p(t) = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t.$$

Derivando esta expresión y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$-L\omega^2(A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t) + R\omega(-A\operatorname{sen}\omega t + B\cos\omega t) + \frac{1}{C}(A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t) = \omega E_0\cos\omega t$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)A + R\omega B &= \omega E_0 \\ -R\omega A + \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)B &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$A = \frac{\omega E_0\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)}{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{\omega^2 E_0 R}{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}.$$

En consecuencia

$$i_p(t) = \frac{\omega E_0}{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}\left(\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)\cos\omega t + \omega R\operatorname{sen}\omega t\right).$$

Eligiendo ϕ, $0 \leqslant \phi < \pi$, tal que

$$\cos\phi = \frac{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)}{\sqrt{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{\omega R}{\sqrt{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}}$$

podemos poner i_p como

$$i_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{Cw}\right)^2 + R^2}}\cos(\omega t - \phi). \tag{3.122}$$

Esta función tiene la misma frecuencia que el voltaje que se aplica al circuito y un desfase dado por ϕ.

Podemos resumir lo anterior diciendo que la solución de la ecuación (3.120) es la suma de un termino transitorio, i_h, cuyo efecto decrece exponencialmente con el tiempo y un término estable, i_p, de tipo sinusoidal con la misma frecuencia que el voltaje aplicado al circuito. Para valores grandes del tiempo el comportamiento del circuito viene descrito esencialmente por la componente estable.

La expresión

$$Z = \sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2} \tag{3.123}$$

se denomina **impedancia** del circuito. La solución estable se puede expresar en términos de la impedancia en la forma

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\cos(\omega t - \phi) \tag{3.124}$$

que es una función sinusoidal de amplitud

$$I_0 = \frac{E_0}{Z}. \tag{3.125}$$

Al término

$$S = L\omega - \frac{1}{C\omega} \tag{3.126}$$

se le denomina **reactancia**. Como $Z^2 = S^2 + R^2$, si δ, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$, es tal que

$$\cos\delta = \frac{R}{Z} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\delta = \frac{S}{Z}$$

resulta que $\cos\delta = \operatorname{sen}\phi$ y $\operatorname{sen}\delta = -\cos\phi$ y, por tanto, $\phi = \delta + \frac{\pi}{2}$. Podemos escribir entonces i_p en la forma

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\cos\left(\omega t - \delta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_0}{Z}\operatorname{sen}(\omega t - \delta). \tag{3.127}$$

El valor de la amplitud de la componente estable, I_0, tiende a 0 cuando la frecuencia tiende a infinito y es máximo cuando la reactancia es nula. Esto ocurre cuando la frecuencia del voltaje de entrada del circuito tiene el valor

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{3.128}$$

que se denomina **frecuencia de resonancia** del circuito.

Ejemplo 3.7.2. Consideremos un circuito como el de la figura 3.12 con $R = 50$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 5 \times 10^{-4}$ faradios. En el instante $t = 0$, cuando la intensidad y la carga son nulas, el circuito se conecta a la red que proporciona una corriente de 220 voltios con una frecuencia de 50 hercios.

Como la frecuencia de la corriente de la red es de 50 hercios su frecuencia angular será $\omega = 2\pi \times 50$ radianes/segundo. La ecuación (3.120) en este caso es de la forma

$$0{,}1i'' + 50i' + 2000i = (100\pi)220 \cos 100\pi t. \tag{3.129}$$

Reemplazando los valores de R, L, C y ω en la ecuación (3.123) obtenemos que la impedancia es

$$Z = \sqrt{2500 + \left(10\pi - \frac{20}{\pi}\right)^2} \approx 55{,}92 \text{ ohmios}$$

luego la amplitud de la solución particular es

$$I_0 = \frac{220}{Z} \approx \frac{220}{55{,}92} \approx 3{,}934 \text{ amperios.}$$

Para obtener i_p en la forma (3.127) necesitamos calcular el ángulo

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{S}{R} = \operatorname{arctg} \frac{10\pi - \frac{20}{\pi}}{50} \approx 0{,}464.$$

En consecuencia

$$i_p(t) = I_0 \operatorname{sen}(100\pi t - \delta) \approx 3{,}934 \operatorname{sen}(100\pi t - 0{,}464). \tag{3.130}$$

La ecuación característica

$$0{,}1\lambda^2 + 50\lambda + 2000 = 0$$

tiene dos raíces

$$\lambda = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 800}}{0{,}2} = \begin{cases} 50\left(-5 + \sqrt{17}\right) \approx -43{,}84 \\ 50\left(-5 - \sqrt{17}\right) \approx -456{,}16 \end{cases}$$

En consecuencia la solución general de (3.129) es

$$i(t) = c_1 e^{50\left(-5+\sqrt{17}\right)t} + c_2 e^{50\left(-5-\sqrt{17}\right)t} + I_0 \operatorname{sen}(100\pi t - \delta).$$

Como $i(0) = Q(0) = 0$ se obtiene de (3.116) que

$$0{,}1i''(0) = 0.$$

Sustituyendo los valores iniciales en la solución se obtienen las condiciones

$$\begin{aligned}
&c_1 + c_2 - I_0 \operatorname{sen} \delta = 0 \\
&50\left(-5+\sqrt{17}\right) c_1 + 50\left(-5-\sqrt{17}\right) c_2 + 100 I_0 \pi \cos \delta = 0
\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= I_0 \operatorname{sen} \delta \\
c_1 - c_2 &= \frac{I_0}{50\sqrt{17}} \left(250 \operatorname{sen} \delta - 100\pi \cos \delta\right)
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{I_0}{2}\left(\left(1+\frac{5}{\sqrt{17}}\right) \operatorname{sen} \delta - \frac{2}{\sqrt{17}} \pi \cos \delta\right) \approx -0{,}730 \\
c_2 &= \frac{I_0}{2}\left(\left(1-\frac{5}{\sqrt{17}}\right) \operatorname{sen} \delta + \frac{2}{\sqrt{17}} \pi \cos \delta\right) \approx 2{,}492.
\end{aligned}$$